

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА**

**Горыня Екатерина Валерьевна**

**Магистерская диссертация**

**Математические модели  
конкурентной среды**

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа: «Надежность и безопасность сложных систем»

Научный руководитель,  
доктор физ.-мат. наук,  
профессор  
Колпак Е. П.

Санкт-Петербург

2018

# Содержание

Введение .....	3
Постановка задачи .....	5
Глава 1. Обзор литературы .....	6
1.1. Определение конкуренции .....	6
1.2. Математические модели конкуренции .....	11
1.3 Показатели конкуренции и модели рынка. ....	13
Глава 2. Статистический анализ мирового экспорта зерна .....	18
2.1. Внешняя торговля зерном.....	18
2.2. Внешняя торговля ячменем .....	20
2.3. Внешняя торговля пшеницей.....	23
2.4. Внешняя торговля рожью .....	26
2.5. Внешняя торговля овсом.....	29
2.6. Внешняя торговля гречей.....	32
Глава 3. Математические модели конкуренции .....	36
3.1. Интерференционная модель конкуренции.....	36
3.2. Эксплуатационная модель конкуренции .....	37
3.3. Математическая модель «активного» ухода от конкуренции... ..	50
3.4. Математическая модель сезонности конкуренции .....	52
3.5. Математическая модель смены производства товара .....	55
3.6. Математическая модель гетерогенного ареала.....	57
Заключение .....	63
Список литературы .....	64

## Введение

Экономическая сфера регулярно претерпевает сильные изменения: создаются новые рабочие места, наблюдается рост производства в различных сферах промышленности, улучшаются технологии и т.д. Важной ее частью является мировая экономическая система, которая имеет сложную иерархическую структуру [1]. В работе будет рассматриваться вопрос математического моделирования конкурентных взаимоотношений в мировой экономике.

Классическое понятие конкуренции появилось в XIX веке. В словаре русского языка И. Ожегова и в энциклопедическом словаре Ф. Брокгауза и И. Ефрона под конкуренцией понимается соперничество нескольких лиц ради достижения одной и той же цели. Экономист XIX в. М. Туган-Барановский рассматривал конкуренцию как экономическую войну. Но одновременно с этим еще в первой половине XIX века Калиновский Б. отмечал, что конкуренция, как соперничество, исчезает при освоении новых технологий

Однако на данный момент классическое определение конкуренции утрачивается. Переосмысление конкуренции происходит в первую очередь у биологов [2]. С 1950-х годов начинает интенсивно развиваться теория нейтрализма, объясняющая эффект мирного существования многочисленных биологических популяций на одном и том же трофическом ресурсе. Аналогичные явления наблюдаются и в системе экономических взаимоотношений. Предварительные оценки говорят о многочисленности мелких предприятий, по сравнению с количеством крупных, что говорит в определенной степени об отсутствии монополистов [3]. Необходимо проверить действительно ли наблюдается данная тенденция и имеет ли место данная гипотеза теории нейтрализма на мировом рынке экономики.

Основные результаты работы опубликованы в [4-16] и докладывались на конференциях: VII Международная научная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных

технологий» (г. Воронеж), 3-я международная конференция «Устойчивость и процессы управления», посвященная 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В. И. Зубова (г. Санкт-Петербург), XLV Международной научной конференции аспирантов и студентов “Процессы управления и устойчивость” (г. Санкт-Петербург), XLVI Международной научной конференции аспирантов и студентов “Процессы управления и устойчивость” (г. Санкт-Петербург).

## **Постановка задачи**

Целью работы является анализ мирового рынка на наличие и оценку конкуренции, а также математическое моделирование рыночной конкуренции.

Основные задачи работы:

1. Статистический анализ конкурентной среды на рынке международной торговли продовольствием;
2. Количественный анализ конкурентной среды с применением коэффициента концентрации, индекса Херфиндаля—Хиршмана и Линда;
3. Разработка «обобщенного» количественного критерия оценки конкурентной среды;
4. Прогноз возможных изменений в конкурентной среде на основе разработанных критериев и моделей;
5. Разработка математических моделей эксплуатационной конкуренции;
6. Разработка математических моделей ухода от конкуренции.

# **Глава 1. Обзор литературы**

## **1.1. Определение конкуренции**

В русском языке конкуренция трактовалась как борьба за достижение больших выгод, преимуществ [17]. В конце XIX в России под конкуренцией в области народного хозяйства понималось «соперничество нескольких лиц в достижении одной и той же цели» [18]. М. И. Туган-Барановский рассматривал «свободную» конкуренцию без вмешательства в нее, как благотворное явление, но способное при определенных условиях переродиться в монополию. Но задолго до исследований М. И. Туган-Барановского в 1859 году Б. Калиновский [19] на основе анализа результатов свободной торговли в Европейский странах, сделал вывод о необходимости ее постоянного ограничения. Однако к настоящему моменту все больше ведется споров о значении конкуренции. «Сейчас существует мнение, что термин конкуренция превратился в симулякр, то есть понятие, оторванное от своей сущности» [20]. Также есть мнение, что сейчас конкуренция это скорее борьба старых технологий с новыми технологиями [21].

В данной работе рассматривается конкуренция в экономической системе. Поэтому будем рассматривать следующую классификацию.

### ***Конкуренция в биологических сообществах***

В биологических системах конкуренция подразумевает такое взаимодействие между живыми организмами, при котором одни организмы используют ресурс, необходимый другим организмам [22]. Такое взаимодействие возможно

- между различными видами популяций (межвидовая конкуренция),
- между видами внутри одной популяции (внутривидовая).

Особи одного вида имеют сходные потребности в ресурсах, обеспечивающих их выживание, рост и размножение [23].

Внутривидовая конкуренция приводит к уменьшению скорости потребления ресурса на одну особь. Это сопровождается снижением выживаемости и плодовитости [24]. Естественно это происходит при недостатке ресурса, в качестве которого могут выступать свет, жизненное пространство, пища и многое другое. Особи внутри вида отличаются друг от друга. Неравноценность конкурирующих особей приводит и к разным результатам для конкретных особей. То есть более «сильный» конкурент несет меньшие потери, чем «слабый». На внутривидовую конкуренцию могут влиять социальная организация, плотность особей и другие факторы [25].

Участниками межвидовой конкуренции являются две популяции, использующие один и тот же ресурс. Пищевые ресурсы у популяций могут быть самыми разнообразными. Конкуренция может происходить только за часть используемых пищевых ресурсов. В этом случае у каждого вида может быть своя «пищевая» ниша. Среда обитания не является однородной, состоит из отдельных участков с благоприятными и неблагоприятными условиями проживания, с разной степенью заселенности. На условия проживания влияют множество факторов: климатические условия, непостоянные и непредсказуемые свойства среды, изменяющиеся во времени, антропогенное давление, хищники и паразиты. Соответственно и уровень конкуренции на разных участках и временных интервалах может быть разным. Поэтому случай конкурентных взаимоотношений, результатом которого должна быть гибель «слабого» вида, происходит далеко не всегда [26].

Ресурсы могут быть пространственно разобщены. Использование ресурсов может сопровождаться расхождением по локальным местам обитания, либо географическим распространением. Доступность ресурсов может быть разной во времени (сутки, сезоны). Бигон утверждал, что постоянно действующая конкуренция наблюдается лишь у незначительного числа сообществ [27].

Также допускается **классификация по типу взаимодействия:**

- Эксплуатационная конкуренция. Особи, обычно, не взаимодействуют между собой непосредственно, а лишь реагируют на недостаток ресурса.
- Интерференционная конкуренция. Происходит непосредственное взаимодействие особей друг с другом, при котором они мешают друг другу использовать ресурс.

В целом, биологические взаимоотношения видов и экономические взаимоотношения компаний очень похожи: происходит борьба за пищу/ресурс/покупателей, малочисленных видов/компаний много в биологической системе и экономической сфере, наблюдается уход от конкуренции в обоих случаях [28].

## **Конкуренция в экономических сообществах**

В случае экономической конкуренции также рассматривается несколько видов по типу взаимодействия.

### ***Виды конкуренции по масштабам развития:***

- Индивидуальная. Ситуация, когда производитель стремится получить наибольшую прибыль или минимизировать возможные потери.
- Местная. Территориальная конкуренция среди производителей.
- Внутритраслевая. Конкуренция среди производителей одной области.
- Межотраслевая. Конкуренция среди производителей различных областей.
- Национальная. Конкуренция среди производителей одной страны.
- Глобальная. Конкуренция на мировом рынке.

### ***Виды конкуренции по характеру развития:***

- Свободная/Регулируемая



- Ценовая/Неценовая. В случае ценовой конкуренции происходит искусственное изменение цен на товар. При неценовой конкуренции происходит непосредственное изменение самого товара с помощью совершенствования технологий производства.

***Виды конкуренции по направленности:***

- Конкуренция за ресурс
- Конкуренция за товары/услуги

***Виды конкуренции по выполнению условий рыночного равновесия:***

- Совершенная/«добросовестная» конкуренция. Конкуренция при наличии достаточного количества независимых участников рынка, отсутствие каких-либо ограничений для выхода новой продукции на рынок.
- Несовершенная/ «недобросовестная» конкуренция. Контроль за определенными сегментами рынка и нарушение правил некоторых производителей товаров, в результате чего возникает предпосылки монополии/олигополии и тд.

Противоречивость определения конкуренции находит свое отражение и в российском законе о конкуренции [29] – под конкуренцией понимается «соперничество хозяйствующих субъектов, при котором самостоятельными действиями каждого из них исключается или ограничивается возможность каждого из них в одностороннем порядке воздействовать на общие условия обращения товаров на соответствующем товарном рынке». Одновременно с этим введено и понятие недобросовестной конкуренции – «любые действия хозяйствующих субъектов (группы лиц), которые направлены на получение преимуществ при осуществлении предпринимательской деятельности...». Таким образом, под конкуренцией следует понимать среду производства и

реализации товаров и услуг, в которой действующие организации и лица не мешают ни в чем друг другу (производи товары и услуги, но не мешай и не ограничивай своими действиями других). То есть административные меры направлены на устранение недобросовестной конкуренции и создания «нейтральной» среды для производства и реализации продукции.

В законе описаны и признаки ограничения конкуренции, которые можно рассматривать как некую «размытую» границу между «конкуренцией» и «недобросовестной конкуренцией». Количественные критерии выявления наличия конкуренции в законе не предусмотрены. Дается лишь критерий определения доминирующего положения трех хозяйствующих объектов.

***Виды конкуренции в зависимости от назначения товара:***

- Горизонтальная конкуренция. Конкуренция между производителями одного товара.
- Вертикальная конкуренция. Конкуренция между производителями разных товаров, но нацеленность товаров на удовлетворение одной и той же потребности.

***Виды конкуренции по типу взаимодействия:***

- Конкуренция производителей
- Конкуренция покупателей

Наблюдается корреляция между типами взаимодействия: чем ниже степень конкуренции производителей, тем выше степень конкуренции между покупателями [30].

## 1.2. Математические модели конкуренции

Первые математические модели конкуренции разработал В. Вольтерра [31]. Он описывал конкурентные взаимоотношения системой дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)) \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)) \end{cases} \quad (1)$$

Где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – коэффициент прироста,  $N_1, N_2$  – численность видов,  $\gamma_1, \gamma_2$  – константы, соответствующие потребностям в пище для видов. Данная модель описывает случай вымирания вида при возрастании численности второго вида при борьбе за пищу.

Далее Мюррей [32] рассмотрел некоторую модификацию модели, и модель стала иметь вид (2):

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left( 1 - \frac{N_1}{K_1} - b_{12} \frac{N_2}{K_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left( 1 - \frac{N_2}{K_2} - b_{21} \frac{N_1}{K_2} \right) \end{cases} \quad (2)$$

Где  $r_1, r_2$  – коэффициент прироста численности,  $N_1, N_2$  – численность видов,  $K_1, K_2$  – емкость среды,  $b_{12}, b_{21}$  – меры влияния видов друг на друга. Данная модель также описывает конкурентные взаимоотношения видов за пищу, при которых практически всегда происходит вымирание одного из видов.

Если сделать замену:  $t = \frac{\tau}{r_1}$ ,  $N_1 = K_1 u_1$ ,  $N_2 = K_2 u_2$ , тогда получается система дифференциальных уравнений (3):

$$\begin{cases} \frac{du_1}{d\tau} = u_1(1 - u_1 - \gamma_1 u_2) \\ \frac{du_2}{d\tau} = \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2 u_1) \end{cases} \quad (3)$$

Где  $\gamma_1 = \frac{b_{12}K_2}{K_1}$ ,  $\gamma_2 = \frac{b_{21}K_1}{K_2}$ ,  $\gamma = \frac{r_1}{r_2}$ .

Затем Базыкин А.Д. [33,34] предложил иную модель (4):

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 (N_1 - L_1) (K_1 - N_1) - e_1 N_1 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 (N_2 - L_2) (K_2 - N_2) - e_2 N_1 N_2 \end{cases} \quad (4)$$

Где  $r_1, r_2, K_1, K_2, L_1, L_2, e_1, e_2$  – положительные константы. Данная модель является моделью конкуренции, учитывающая эффект Олли.

Математические модели ухода от конкуренции в открытых российских источниках не найдены.

### **1.3. Показатели конкуренции и модели рынка**

Методы макроэкономического анализа начали разрабатываться в XVII в. Предлагались методы оценки числа жителей, домашних хозяйств, доходов от разных видов производственной деятельности и оборотов торговли и др. Серьезный анализ экономического роста при отсутствии качественного статистического учета вплоть до середины XX века провести было сложно [35].

Существует три основных подхода для вычисления уровня конкуренции. На сегодняшний день предложено несколько основных критериев оценки конкуренции. За основу берется гипотеза о том, что конкуренция зависит от числа участников процесса производства и реализации товаров. Выделяют, в зависимости от числа участников, несколько типов рынков. Основные из них: монополия, олигополия, монополистическая конкуренция, чистая конкуренция (табл. 1). При этом нет четкой «количественной» границы между этими рынками и, соответственно, между «конкуренцией» и «недобросовестной конкуренцией». Такая классификация не отражает и интенсивность происходящих на рынках процессов.

Второй подход, основывается на использовании финансовых показателей фирм – низкая норма прибыли говорит о незначительной рыночной власти, а высокая – о значительной власти, ограничивающей конкуренцию.

Табл. 1. Классификация типов рынка

<b>Классификационные признаки</b>	<b>Модели рынка</b>			
	<b>Чистая конкуренция</b>	<b>Монополистическая конкуренция</b>	<b>Олигополия</b>	<b>Монополия</b>
<b>Число предприятий</b>	Очень много	Много	Несколько	Одна
<b>Тип продукции, услуг</b>	Стандартизованный	Дифференцированный	Стандартизованный или дифференцированный	Уникальный, нет близких заменителей
<b>Контроль над ценой</b>	Отсутствует	Возможен, но довольно в узких рамках	Ограниченный взаимной зависимостью, значительной при тайном сговоре	Значительный
<b>Условия вступления в отрасль</b>	Очень легкие, препятствия отсутствуют	Сравнительно легкие	Существенно затруднено	Блокировано
<b>Неценовая конкуренция</b>	Отсутствует	Значительный упор на рекламу, товарные знаки, торговые марки	Очень распространена, особенно при дифференциации продукта	Главным образом реклама и отношения с общественностью
<b>Примеры</b>	Сельское хозяйство	Розничная торговля, производство одежды, обуви	Производство стали, автомобилей	Местные предприятия коммунального хозяйства

В основе третьего подхода лежит предположение, что уровень конкуренции находится в обратной зависимости от концентрации рыночных долей фирм на рынке: чем выше концентрация производителей, тем менее конкурентной считается рыночная среда. Разработано достаточно много показателей: индексы концентрации, индекс Херфиндаля–Хиршмана, коэффициент относительной концентрации, коэффициент энтропии, коэффициент вариации рыночных долей, модифицированный коэффициент Джинни, ранговый индекс концентрации (индекс Холла – Тайдмана, индекс Розенблюта), индекс максимальной доли и другие индексы. Ниже рассматриваются индексы, в которых количественная оценка концентрации

производства оценивается по долям фирм в общем балансе реализуемых товаров на рынке, а именно индекс концентрации для трех компаний, индекс Херфиндаля-Хиршмана и индекс Линда.

1) Коэффициент концентрации рынка  $CR_n$  подсчитывается по формуле

$$CR_n = \frac{\sum_{k=1}^n V_k}{\sum_{k=1}^N V_k},$$

где -  $V_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) объем продаж  $k$ -ой фирмы на рынке,  $n$  - число самых крупных фирм участниц рынка,  $N$  - общее число фирм рынка.

Индекс концентрации измеряется в относительных долях (или процентах). При равных долях всех операторов  $CR_n = \frac{n}{N}$ . При фиксированном выборе  $n$  в этом случае  $CR_n \rightarrow 0$ , если  $N \rightarrow \infty$ . То есть с увеличением числа равноправных фирм коэффициент концентрации уменьшается.

Поскольку  $CR_n = \left(1 + \frac{\sum_{k=n+1}^N V_k}{\sum_{k=1}^n V_k}\right)^{-1}$ , то увеличение доли продаж самых «крупных»  $n$  фирм на рынке, по сравнению с долей продаж остальных  $N - n$  фирм увеличивает индекс концентрации ( $CR_n \rightarrow 1$ ). То есть чем ближе значение этого показателя к 1, тем слабее конкуренция.

Границы индекса концентрации будут следующие:

1. Если  $CR_3 \in [0, 0.45)$ , то рынок считается неконцентрированным;
2. Если  $CR_3 \in [0.45, 0.7)$ , то рынок считается умеренно концентрированным;
3. Если  $CR_3 \in [0.7, 1]$ , то рынок считается высококонцентрированным.

Индекс концентрации не учитывает размер тех фирм, которые не попали в выборку, не учитывает распределения долей внутри разных групп фирм.

2) Индекс Херфиндаля—Хиршмана учитывает доли всех фирм и

подсчитывается по формуле

$$H_N = \sum_{k=1}^N V_k^2.$$

В случае равных долей ( $V_k = \frac{1}{N}, k = 1, 2, \dots, N$ )  $H_N = \frac{1}{N}$ . То есть с увеличением числа равноправных участников индекс Херфиндаля—Хиршмана уменьшается. Если доля хотя бы одного оператора увеличивается, а остальных уменьшается, то  $H$  увеличивается, приближаясь к 1. Этот индекс с одной стороны является показателем концентрации, а с другой стороны, в отличие от индекса  $CR_n$ , характеризует распределение долей между всеми участниками.

Границы индекса концентрации будут следующие:

1. Если  $H \in [0, 0.1)$ , то концентрация считается низкой;
2. если  $H \in [0.1, 0.2)$ , то концентрация считается средней;
3. если  $H \in [0.2, 1)$ , то концентрация считается высокой.

3) *Индекс Линда* используется в странах Европейского союза для анализа различий в группе крупнейших фирм. С его помощью определяется «ядро» рынка. Для этого рыночные доли операторов располагаются в порядке убывания  $V_1 \geq V_2 \geq \dots V_N$ .

Индекс Линда для двух фирм подсчитывается по формуле

$$IL = \frac{V_1}{V_2};$$

для трех фирм –

$$IL = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{V_1}{V_2 + V_3} + \frac{V_1 + V_2}{2V_3} \right);$$

для четырех фирм –

$$IL = \frac{1}{3} \left( 3 \frac{V_1}{V_2 + V_3 + V_4} + \frac{V_1 + V_2}{V_3 + V_4} + \frac{1}{3} \frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_4} \right);$$



для пяти фирм –

$$IL = \frac{1}{4} \left( 4 \frac{V_1}{V_2 + V_3 + V_4 + V_5} + \frac{3}{2} \frac{V_1 + V_2}{V_3 + V_4 + V_5} + \frac{2}{3} \frac{V_1 + V_2 + V_3}{V_4 + V_5} + \frac{1}{4} \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V_5} \right);$$

Если доли всех фирм одинаковы, то индекс Линда равен единице. Если доля одного оператора будет все время расти, то индекс Линда будет все время увеличиваться. Поэтому подключение каждого новой фирмы должно сопровождаться уменьшением индекса. Если, начиная с  $k + 1$ -го оператора, индекс начинает увеличиваться, то первые  $k$  фирм будут составлять «ядро» рынка.

## **Глава 2. Статистический анализ мирового экспорта зерна**

### **2.1. Внешняя торговля зерном**

Статистические данные, используемые в данной работе, были взяты с официального интернет-ресурса [36]. Данный сайт организован объединением ФАО (англ. Food and Agriculture Organization, FAO). Это учреждение ООН, которое направлено на борьбу с голодом во всем мире. Основная цель ФАО это гарантирование продовольственной безопасности и обеспечение доступа населения к пище.

В ФАО входят 194 государства-члена. Специалисты организации являются ответственными лицами за сохранение культурных традиций и особенностей. Филиалы ФАО находятся в 130 странах, штаб-квартира располагается в Риме.

Статистические данные ФАО достаточно обширны, все данные поступают через глобальный мониторинг. Организация несет ответственность за сбор данных, их согласование, обработку и распространение статистических данных. Также им необходимо всегда предоставлять международную отчетность. Статистической целью ФАО является методологическая разработка 21 показателя устойчивого развития, которые в долгосрочной перспективе каждая страна должна генерировать самостоятельно.

На данный момент статистическая деятельность ФАО охватывает следующие области:

- Производство продуктов;
- Выбросы от сельского хозяйства;
- Торговля;
- Продовольственный баланс;
- Продовольственная безопасность;

- Вкладываемые ресурсы;
- Инвестирование;
- Население;
- Агроэкологические показатели;
- Выбросы – землепользование;
- Лесное хозяйство.

В работе анализируются статистические данные по рынку зерновых культур. Ниже приведены результаты анализа по основным зерновым культурам:

- Ячмень;
- Греча;
- Овес;
- Пшеница;
- Рожь.

Сначала в ходе анализа были рассмотрены индексы концентрации для 1, 3 и 5 стран, а также индекс Херфиндаля-Хирша для периода 1961-2013 гг. На рисунках 1-25 приведены результаты статистического анализа. Наибольший объем экспорта зерна достигается для пшеницы и ячменя.

## 2.2. Внешняя торговля ячменем

На рисунке 1 приведены данные по изменению индекса  $CR_3$  с 1960 по 2013 г. Горизонтальными линиями отмечены границы раздела между низко концентрированным, средне и высоко концентрированным рынками. На рисунке 2 приведены данные по изменению индекса  $HH$  с 1960 по 2013 г.

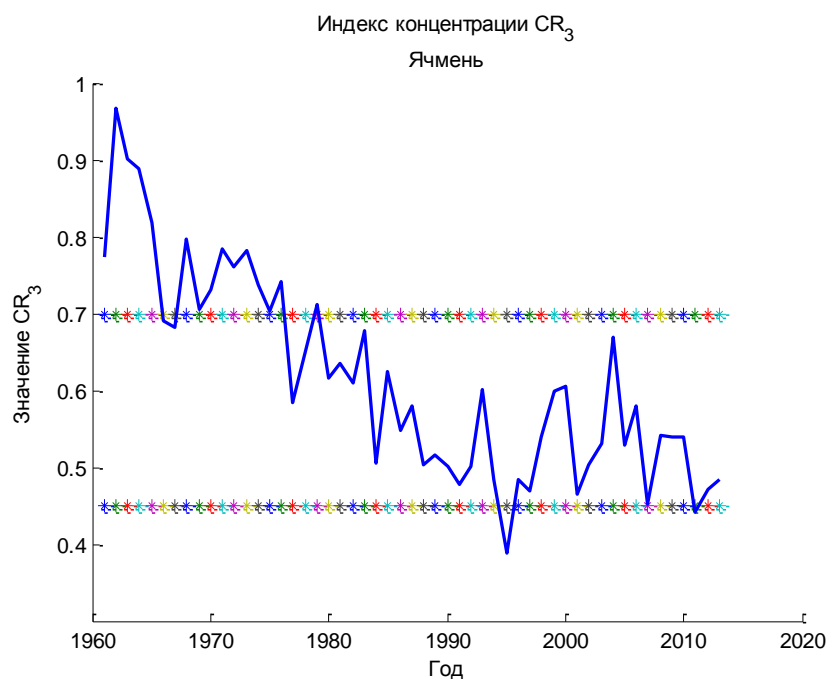


Рис. 1



Рис. 2

По результатам вычислений можно сделать вывод о том, что рынок средне концентрирован, то есть существуют определенные барьеры для начала продаж на рынке. Индекс Линда показал, что ядро рынка составляет две страны, а именно: Франция и Канада. На рисунке 3 приведено изменение роста объемов экспорта. Исходя из анализа, объем экспорта все время растет, что показывает развитие стран-производителей.

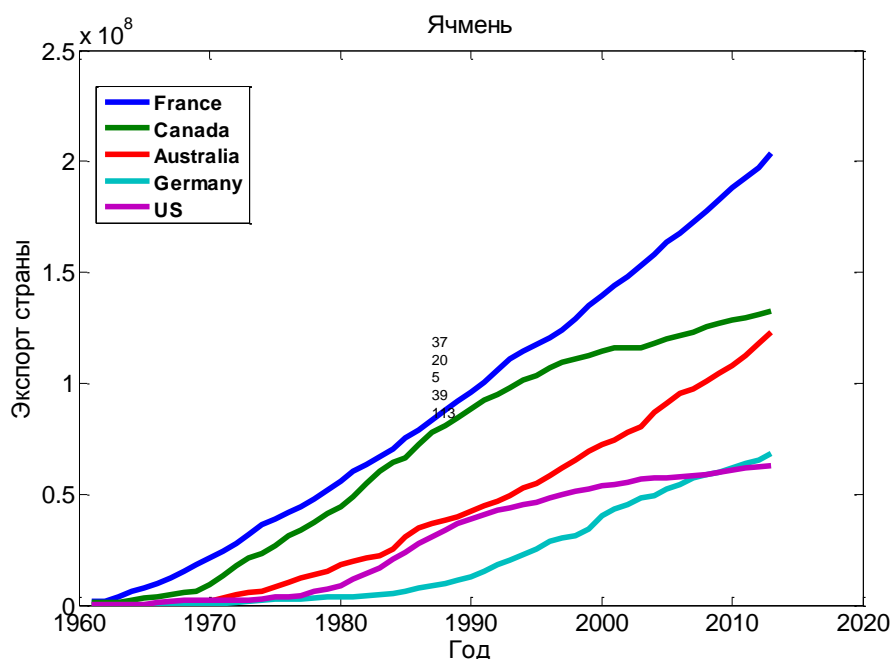


Рис. 3

На рисунках 1 и 2 значения индексов имеют скачки. Поэтому предлагается вариант расчет индекса по накопленному количеству товара к n-ому году, а не количество товара на определенный год. Тогда накопленный индекс концентрации будет иметь вид, представленный на рисунке 4.

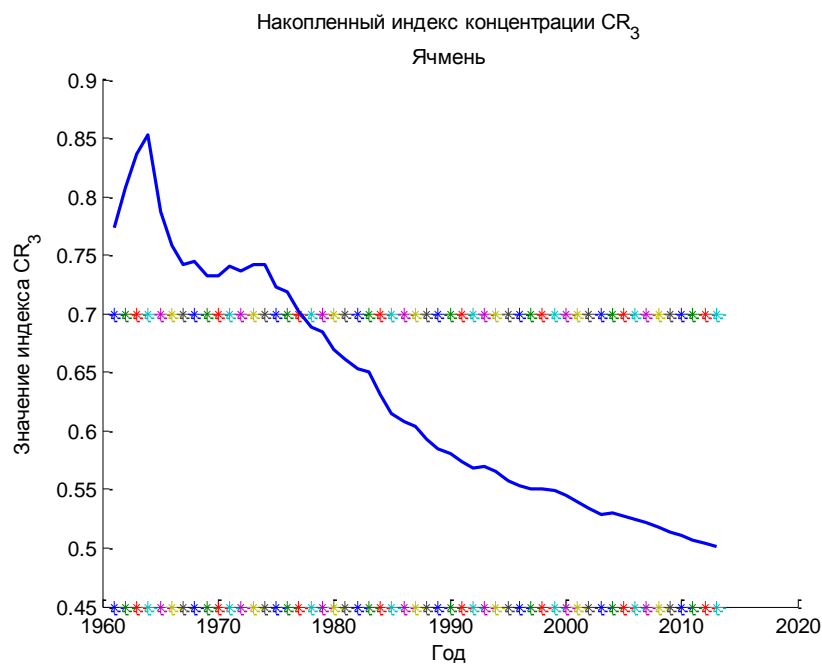


Рис. 4

Также предлагается анализ общей доли экспорта для  $k$  стран. Если наблюдается спад, то результатом является снижение концентрированности рынка, то есть улучшение рыночных условий. И наоборот, если наблюдается скачок, тогда условия на рынке ухудшаются, то есть появляется монополия или олигополия. Результаты изображены на рисунке 5, где можно заметить спад графика, что означает улучшение условий на мировом рынке.

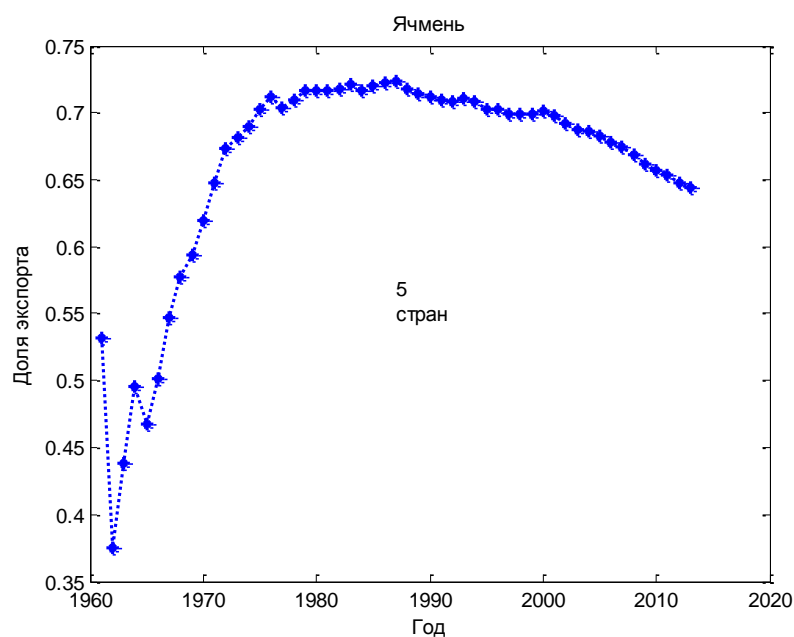


Рис. 5

### 2.3. Внешняя торговля пшеницей

Рассмотрим экспорт пшеницы. На рисунке 6 приведены данные по изменению индекса  $CR_3$  с 1960 по 2013 г. Горизонтальными линиями отмечены границы раздела между низко концентрированным, средне и высоко концентрированным рынками. На рисунке 7 приведены данные по изменению индекса  $HH$  с 1960 по 2013 г.

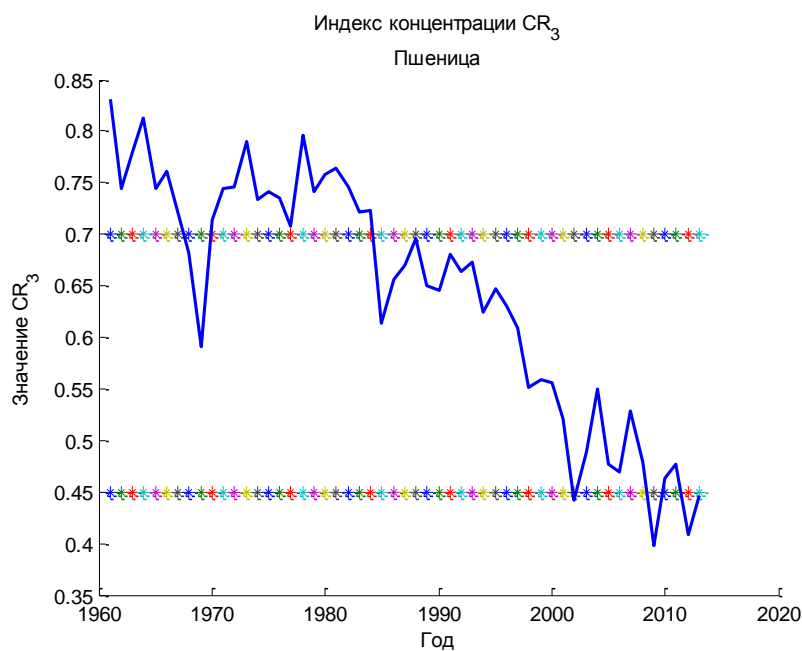


Рис. 6

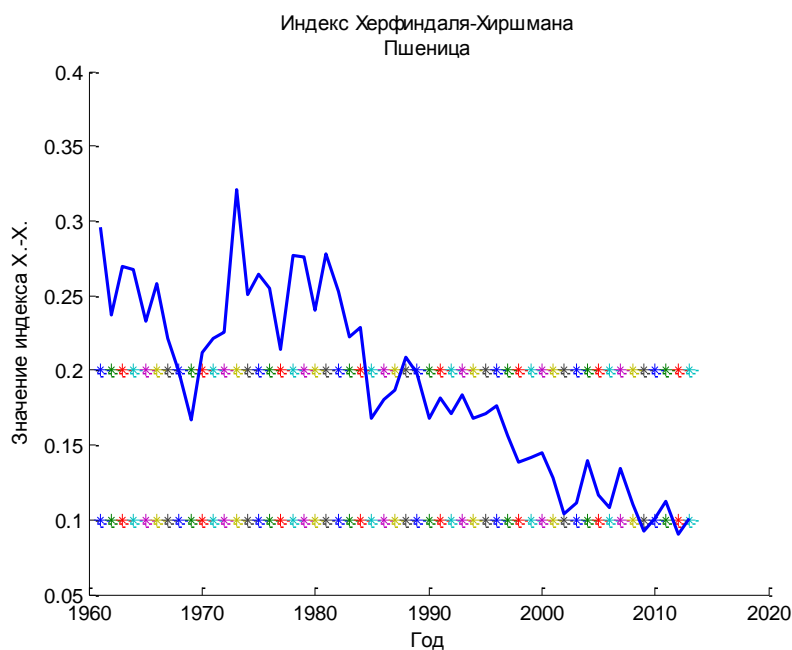


Рис. 7

По результатам вычислений можно сделать вывод о том, что рынок был средне концентрирован с 1985 по 2010, но сейчас ситуация улучшается и рынок становится низко концентрированным. Индекс Линда показал, что ядро рынка составляет одна страна, а именно: США, что может говорить о наличии монополии. На рисунке 8 приведено изменение роста объемов экспорта. Исходя из анализа, объем экспорта все время растет, что показывает развитие стран-производителей.

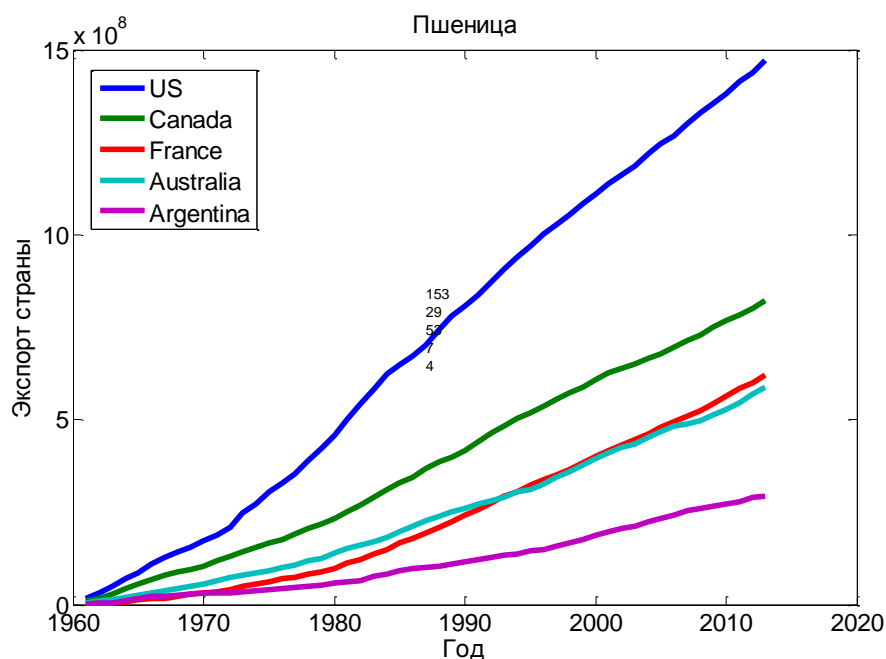


Рис. 8

Накопленный индекс концентрации будет иметь вид, представленный на рисунке 9. Следуя анализу общей доли экспорта для 5 стран, представленному на рисунке 10, наблюдается спад, а значит, условия на рынке улучшаются.



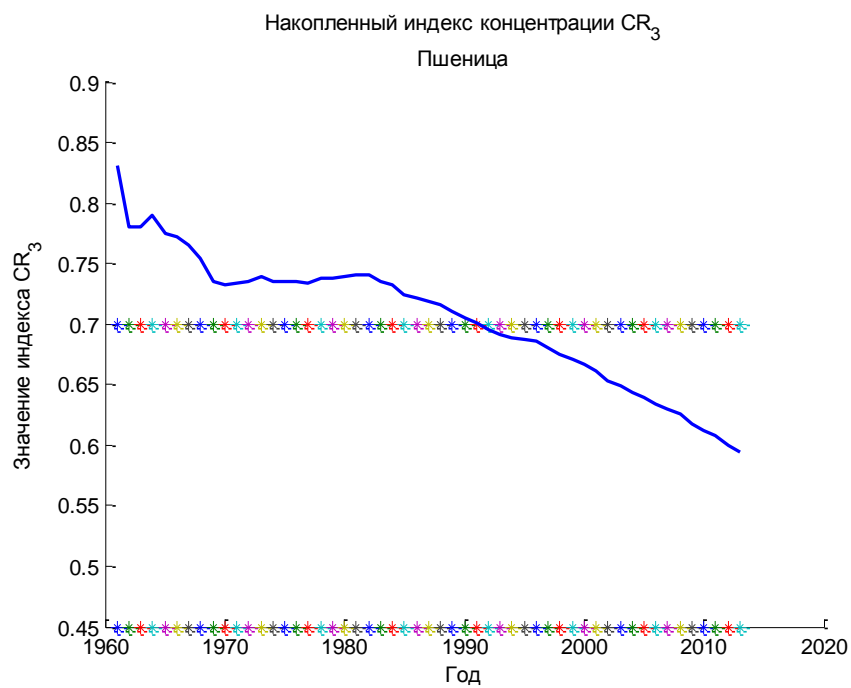


Рис. 9

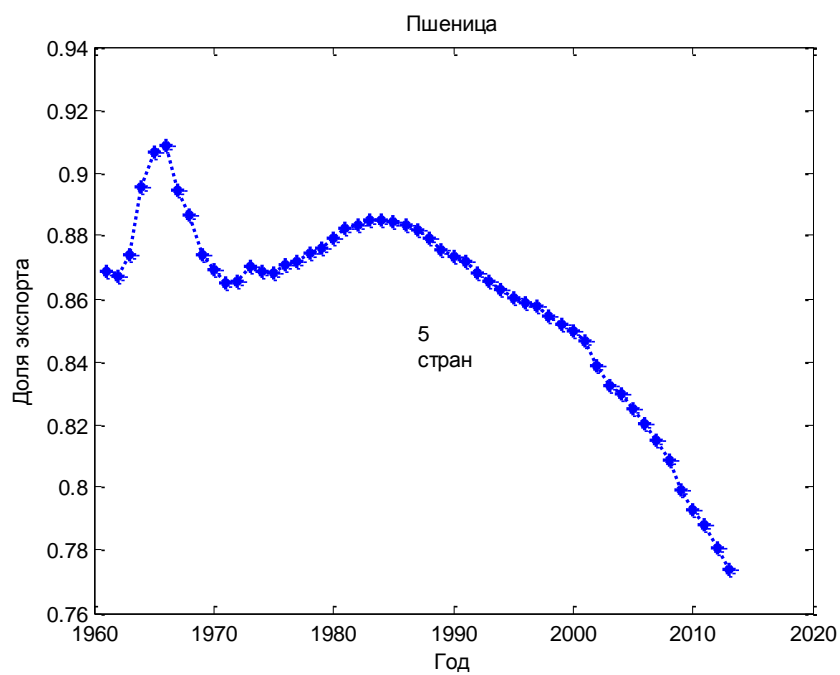


Рис. 10

Несмотря на то, что индекс Линда показал, что ядро рынка составляет одна страна, тем не менее, рынок стабилизируется.

## 2.4. Внешняя торговля рожью

Рассмотрим экспорт ржи. На рисунке 11 приведены данные по изменению индекса  $CR_3$  с 1960 по 2013 г. Горизонтальными линиями отмечены границы раздела между низко концентрированным, средне и высоко концентрированным рынками. На рисунке 12 приведены данные по изменению индекса  $HH$  с 1960 по 2013 г.

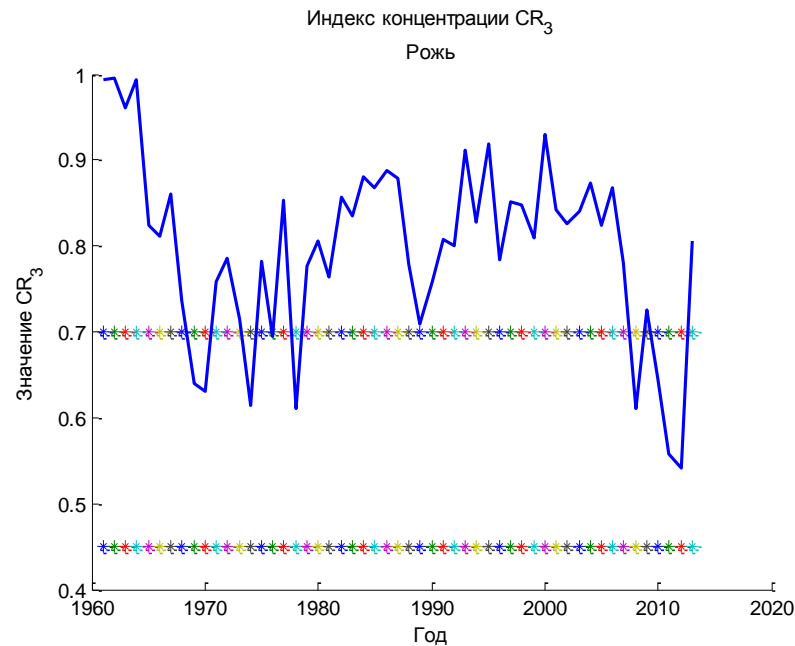


Рис. 11

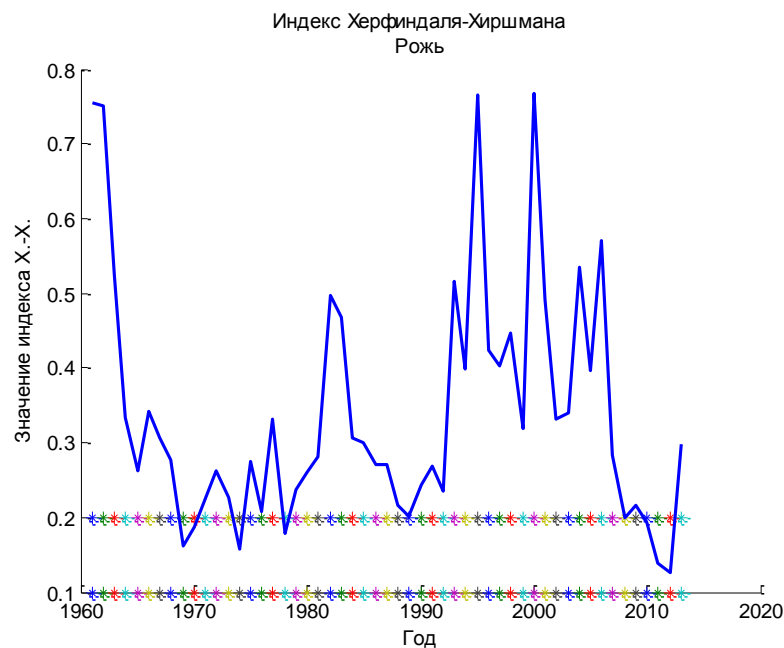


Рис. 12

По результатам вычислений можно сделать вывод о том, что рынок высоко концентрирован, то есть существуют монополия. Оценка по индексу Линда показала, что ядро рынка составляет одна страна, а именно: Германия. На рисунке 13 приведено изменение роста объемов экспорта. Исходя из анализа, объем экспорта все время растет, что показывает развитие стран-производителей.

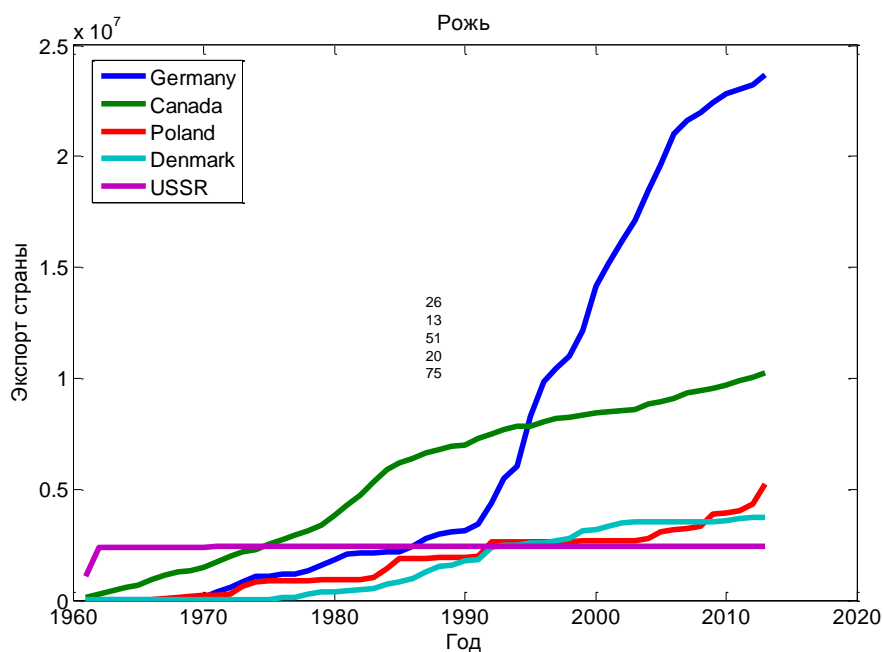


Рис. 13

Также анализируя долю экспорта на рисунке 14 для пяти стран, можно заметить, что ситуация на рынке складывается неоднозначно. То есть, если объем экспорта Германии будет постоянно увеличиваться, это может привести к наличию монополии. Также можно заметить, что с 1990 года, когда начался активный рост объемов экспорта Германии, ситуация на рынке стала ухудшаться, что и показывает накопленный индекс концентрации на рисунке 15.

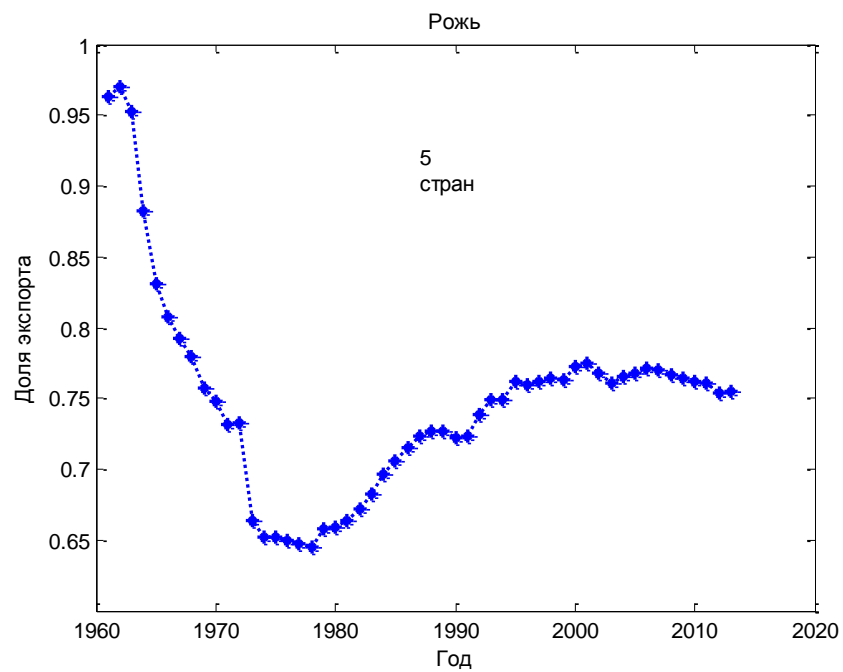


Рис. 14

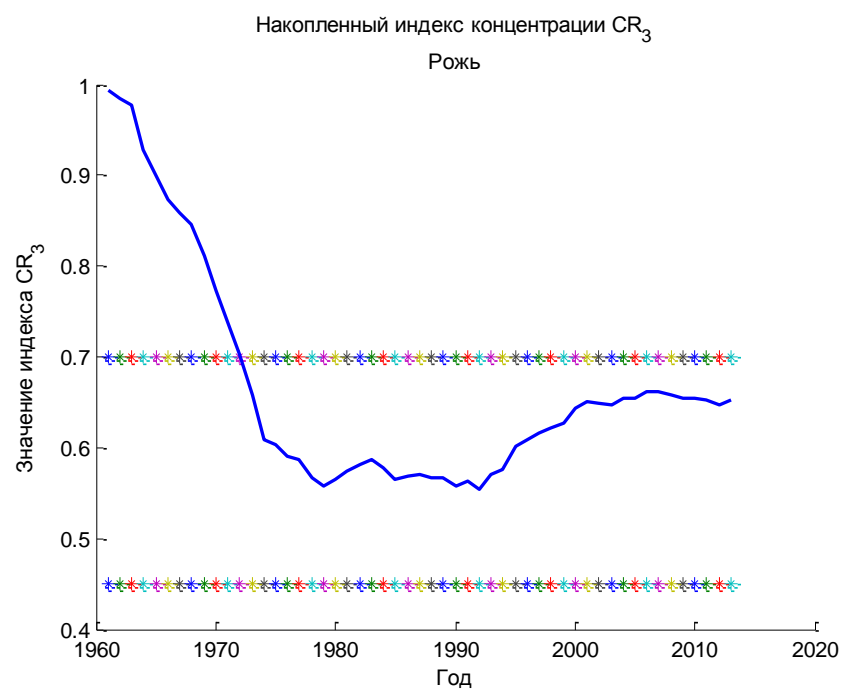


Рис. 15

## 2.5. Внешняя торговля овсом

Рассмотрим экспорт овса. На рисунке 16 приведены данные по изменению индекса  $CR_3$  с 1960 по 2013 г. Горизонтальными линиями отмечены границы раздела между низко концентрированным, средне и высоко концентрированным рынками. На рисунке 17 приведены данные по изменению индекса  $HH$  с 1960 по 2013 г.

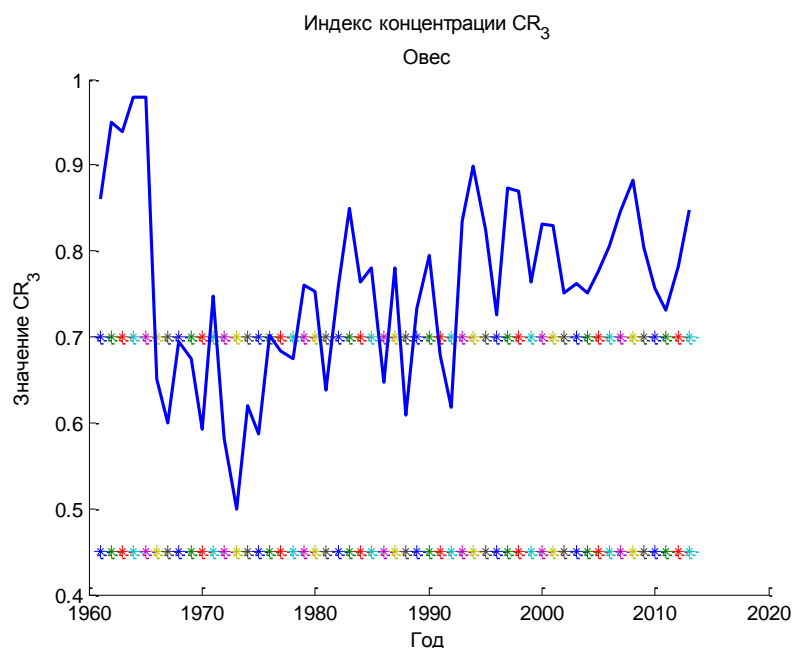


Рис. 16

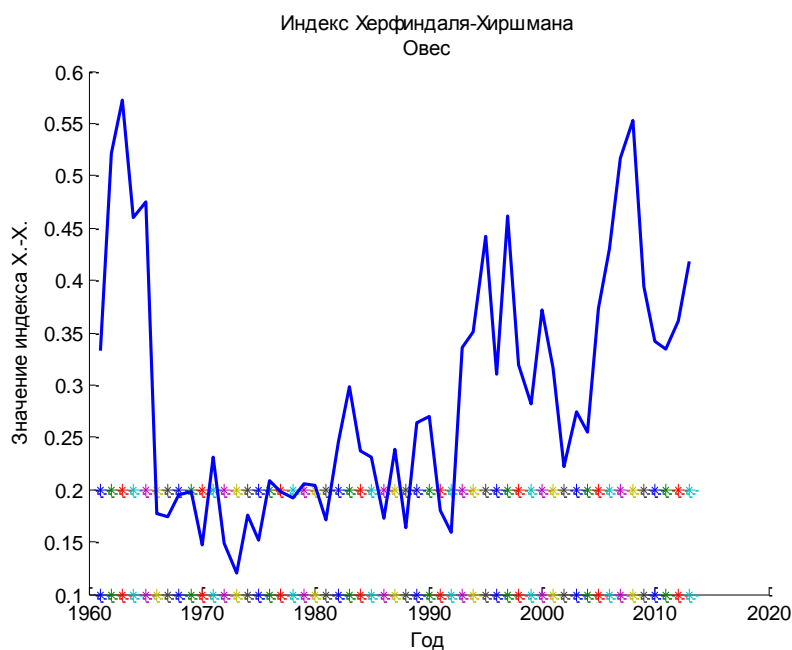


Рис. 17

Наблюдается спад индекса с 1965 до 1990, однако затем индекс начинает возрастать, что может показывать наличие монополии/олигополии. Проверив индекс Линда, получим, что ядро рынка составляет три страны: Канада, Швеция, Финляндия. Общий экспорт 5 стран растет (рис.18).

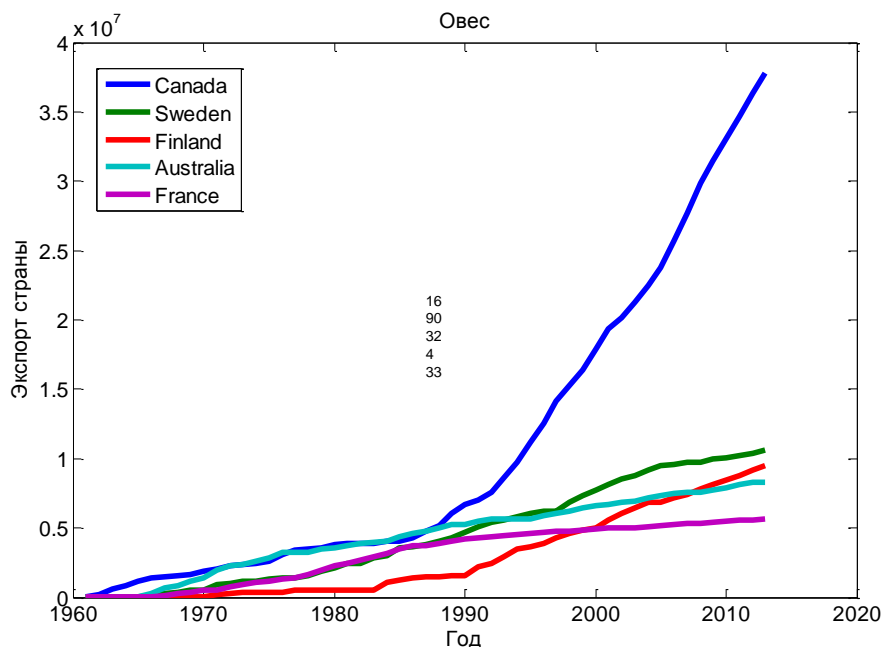


Рис. 18

Исходя из анализа доли экспорта 5 стран на рынке (рис.19), доля увеличивается, что говорит о высокой концентрированности рынка. Накопленный индекс концентрации, представленный на рисунке 20, также растет за последний года.

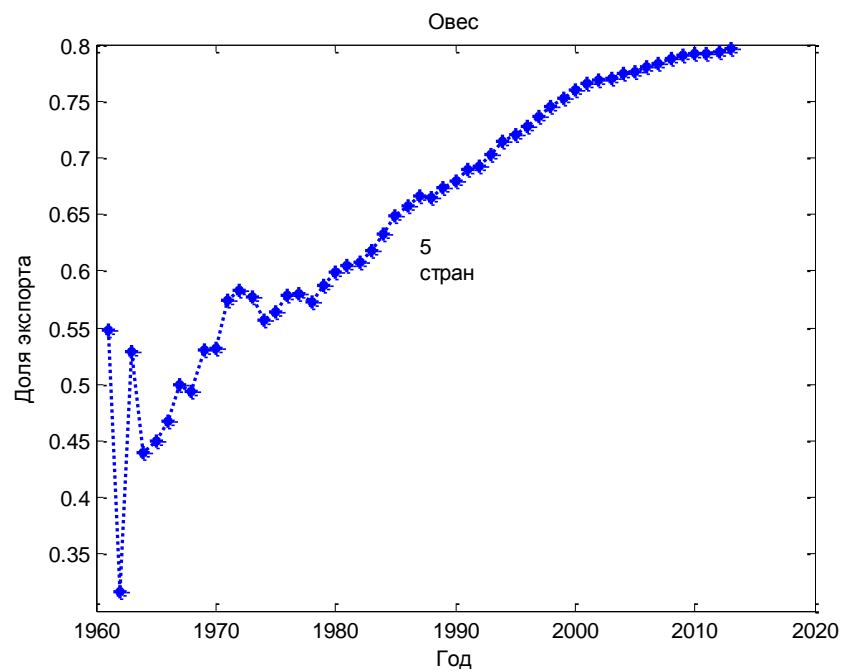


Рис. 19

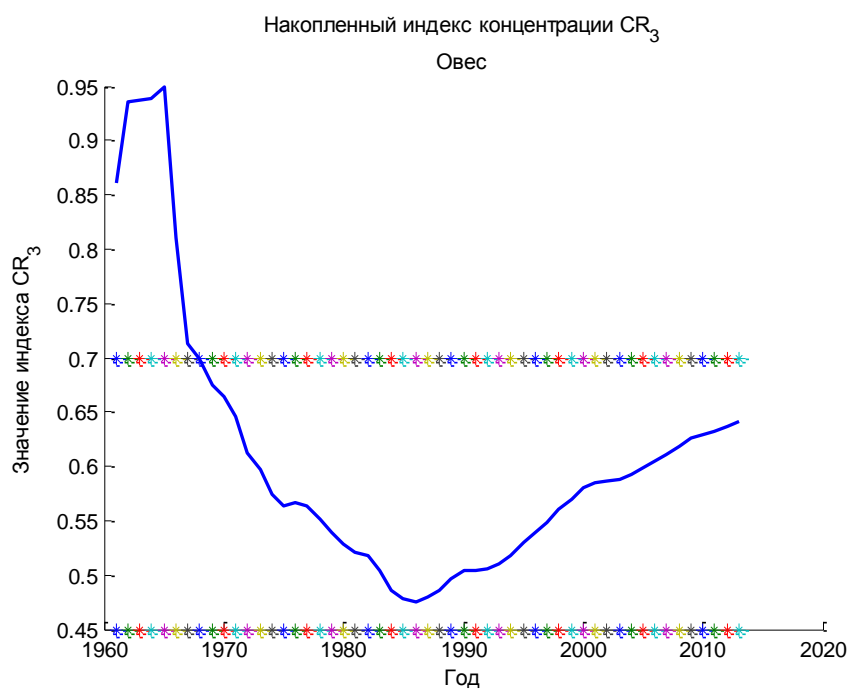


Рис. 20

## 2.6. Внешняя торговля гречей

Рассмотрим экспорт гречи. На рисунке 21 приведены данные по изменению индекса  $CR_3$  с 1960 по 2013 г. Горизонтальными линиями отмечены границы раздела между низко концентрированным, средне и высоко концентрированным рынками. На рисунке 22 приведены данные по изменению индекса  $HH$  с 1960 по 2013 г.

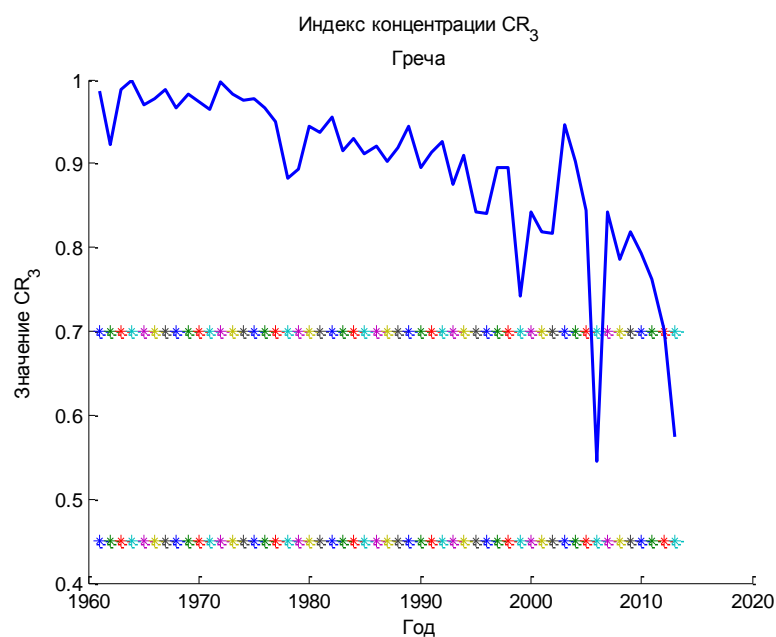


Рис. 21



Рис. 22



Значения индексов превышают пороговые значения, что говорит о высокой концентрированности рынка. По критерию Линда получили, что ядро рынка состоит из двух стран: Китай и Канада. На рисунке 23 приведено изменение роста объемов экспорта. Исходя из анализа, объем экспорта все время растет, что показывает развитие стран-производителей.

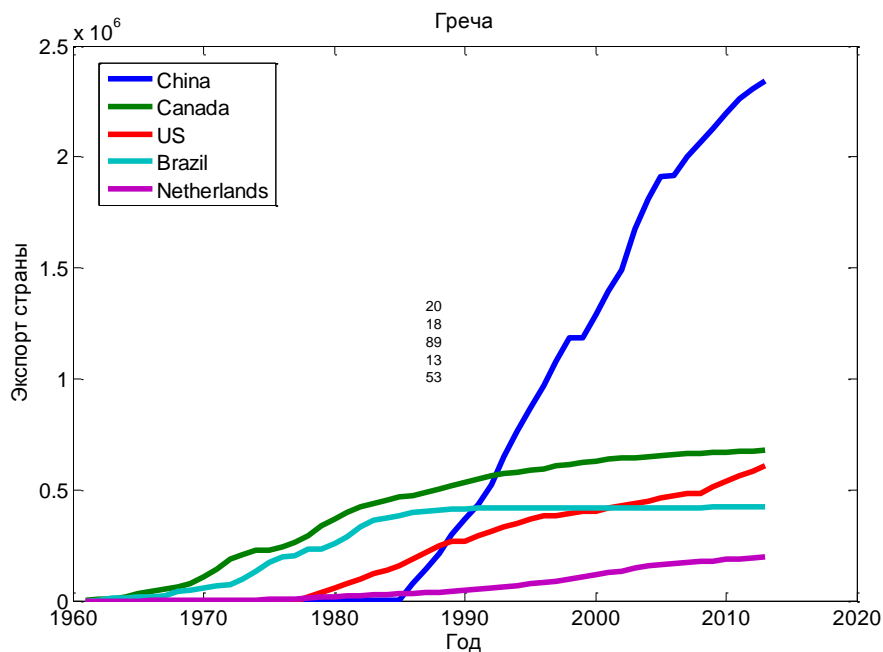


Рис. 23

Следуя результатам статистического анализа доли экспорта для 5 стран (рис.24) и накопленному индексу концентрации (рис.25), рынок только начинает стабилизироваться, однако на данный момент появление на мировом рынке новых стран экспортеров практически невозможно.

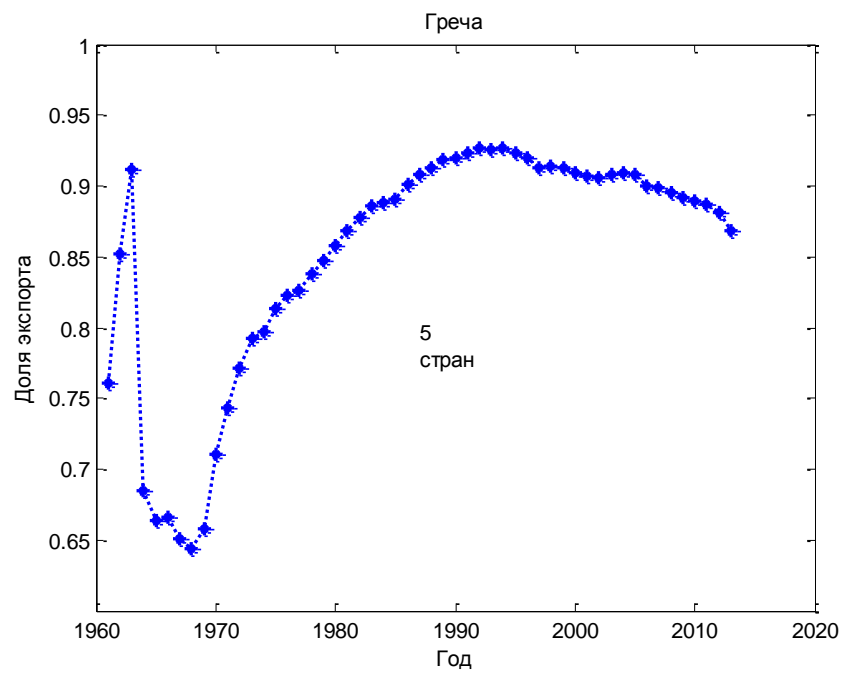


Рис. 24

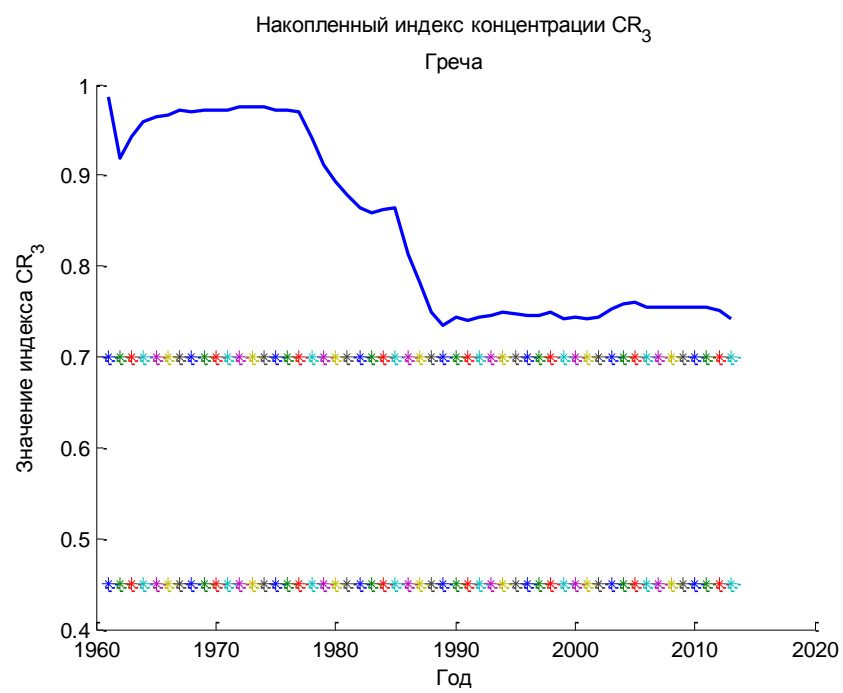


Рис. 25

Общие выводы по главе:

1. По основным видам зерновых культур происходит постоянный рост продаж на мировом рынке.
2. Ведущие страны, производящие максимальный объем продукции практически всегда меняются местами. Они могут не являться монополистами.
3. Статистический анализ с использованием индексов концентрации и Херфиндаля-Хиршмана говорит о неоднородности мирового рынка экспорта зерновых культур.
4. Используемые критерии не позволяют дать прогноз ситуации на мировом рынке на длительный временной интервал.
5. Разработан критерий, позволяющий дать прогноз состояния конкурентной среды зерновых культур.

## Глава 3. Математические модели конкуренции

В данной главе будут рассматриваться математические модели конкуренции. Будет осуществлен анализ стационарных точек на устойчивость и сделан вывод о применимости тех или иных математических моделей конкуренции на практике. Также, используя данные модели, будут установлены границы для индексов концентрации и Херфиндаля-Хиршмана.

### 3.1. Интерференционная модель конкуренции

Математическая модель (3) является интерференционной моделью. Она учитывает как внешнюю, так и внутреннюю конкуренцию.

Система уравнений (3) имеет четыре стационарные точки

1.  $u_1 = 0, u_2 = 0.$
2.  $u_1 = 1, u_2 = 0.$
3.  $u_1 = 0, u_2 = 1.$
4.  $u_1 = \frac{1-\gamma_1}{1-\gamma_1\gamma_2}, u_2 = \frac{1-\gamma_2}{1-\gamma_1\gamma_2},$  если  $\gamma_1 > 1$  и  $\gamma_2 > 1$  или  $\gamma_1 < 1$  и  $\gamma_2 < 1.$

Первая стационарная точка является неустойчивой, вторая будет устойчивой, если  $\gamma_1 < 1$  и  $\gamma_2 > 1$ , а третья, если  $\gamma_1 > 1$  и  $\gamma_2 < 1$ . Четвертая стационарная точка реализуется и будет устойчивой, если  $\gamma_1 < 1$  и  $\gamma_2 < 1$ .

В четвёртой стационарной точке собственные значения матрицы Якоби правой части уравнений (3), являющиеся корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 + (u_1 + \gamma u_2)\lambda + \gamma(1 - \gamma_1\gamma_2)u_1u_2 = 0$$

отрицательные. Поэтому эта стационарная точка будет устойчивым фокусом.

Таким образом, модель конкуренции (3) допускает одновременное устойчивое существование двух компаний.

### 3.2. Эксплуатационные модели конкуренции

#### *Эксплуатационная модель с участием одной компании*

Предлагается альтернативная математическая модель, где отдельным дифференциальным уравнением выступает ресурс (5). В математической модели (5) участвует одна компания  $u$ , которая потребляет ресурс  $S$ .

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \mu u \left( \frac{s}{b+s} - u \right) \\ \frac{ds}{dt} = \mu_s s (1-s) - \gamma \mu \frac{us}{b+s} \end{cases} \quad (5)$$

Где  $u$  – объем продукции компании;

$\mu$  – удельная скорость роста продукции компании;

$s$  – количество ресурса;

$\gamma$  – коэффициент переработки ресурса;

$f(s) = \frac{s}{b+s}$  – функция, характеризующая влияние количество ресурса на скорость его потребления;

$\mu_s$  – удельная скорость роста ресурса. Все константы положительные.

Матрица Якоби будет иметь вид:

$$J = \begin{pmatrix} \mu \left( \frac{s}{b+s} - u \right) - \mu u & \frac{\mu u b}{(b+s)^2} \\ -\frac{\gamma \mu s}{b+s} & \mu_s (1-2s) - \frac{\gamma \mu u s}{(b+s)^2} \end{pmatrix}$$

Стационарные точки:

1.  $u=0, s=0$ .

В этой стационарной точке матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu_s \end{pmatrix}$$

имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.

2.  $u=0, s=1$ .

В этой стационарной точке матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \mu \frac{1}{b+1} & 0 \\ -\frac{\gamma\mu}{b+1} & -\mu_s \end{pmatrix}$$

имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.

$$3. \ u = \frac{s}{b+s}, \ f(s) = \mu_s(1-s) - \gamma\mu \frac{s}{(b+s)^2}.$$

Нетривиальное стационарное значение  $S$  находится как корень уравнения

$$1 - \frac{s}{\mu_s} - \gamma\mu \frac{s}{\mu_s(b+s)^2} = 0 \quad (6)$$

Уравнение (6) в зависимости от значений параметров может иметь один или три корня (рис.26). Так как стационарные точки 1 и 2 неустойчивы и решение не уходит на бесконечность, значит, одна из данных трех точек будет устойчива.

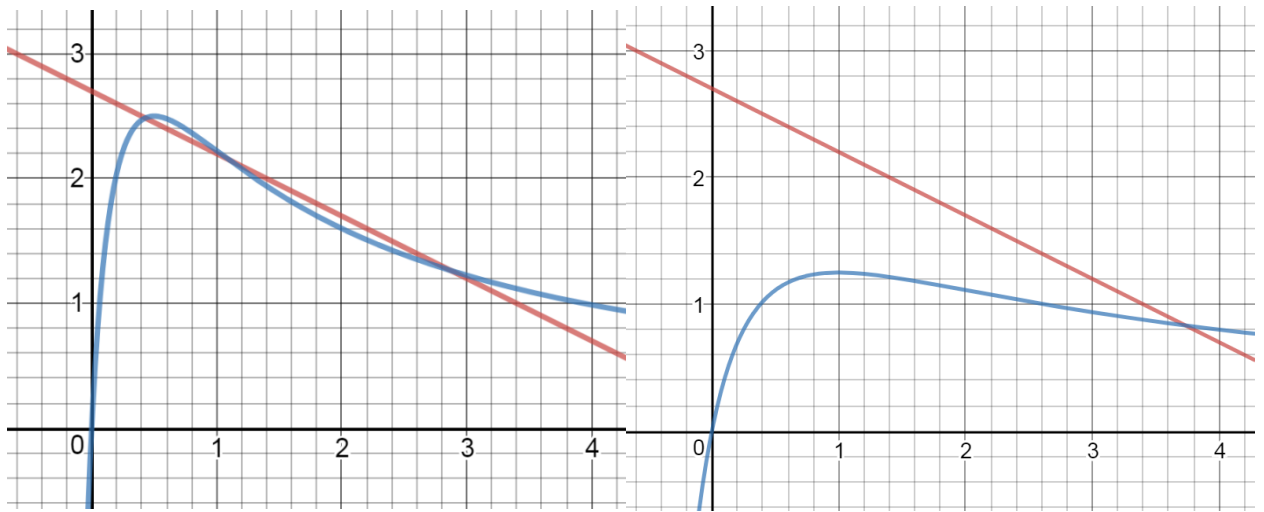


Рис.26

На рисунке 27 отображено изменение численности малочисленной в начальный момент популяции на невозстанавливаемом трофическом ресурсе для случая  $\mu = 1, b = 1, \gamma = 0.5, \mu_s = 0, S_0 = 1, u_0 = 0$ .

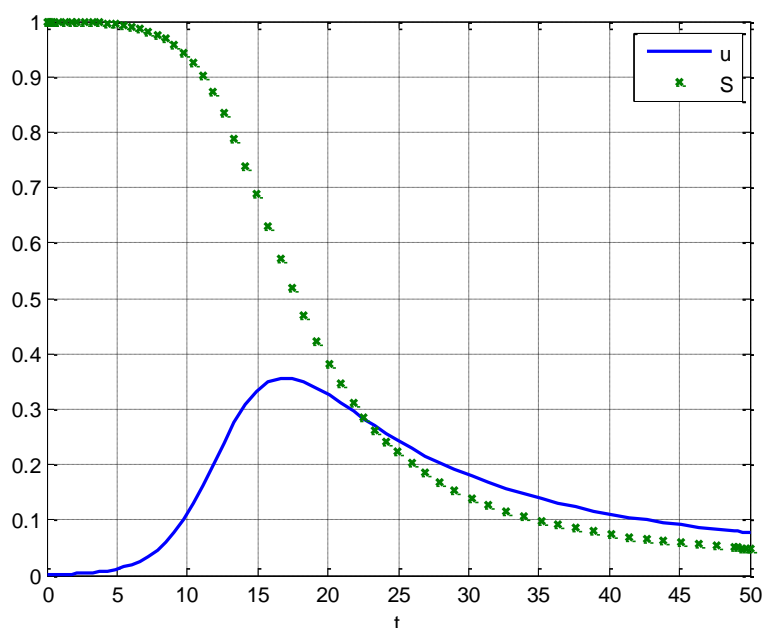


Рис. 27

### ***Эксплуатационная модель с участием двух компаний***

Расширяя модель (5) на две компании, получим систему дифференциальных уравнений (6):

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \mu_1 u_1 \left( \frac{S}{S + b_1} - u_1 \right) \\ \frac{du_2}{dt} = \mu_2 u_2 \left( \frac{S}{S + b_2} - u_2 \right) \\ \frac{dS}{dt} = -\gamma_1 \mu_1 u_1 \frac{S}{S + b_1} - \gamma_2 \mu_2 u_2 \frac{S}{S + b_2} + \mu_s S \left( 1 - \frac{S}{K} \right) \end{cases} \quad (6)$$

Где  $u_1, u_2$  – объем продукции первой и второй компании;

$\mu_1, \mu_2$  – удельная скорость роста первой и второй компании;

$S$  – количество ресурса;

$K$  – емкость среды (максимальное количество ресурса, который может быть произведен);

$\gamma_1, \gamma_2$  – коэффициент переработки ресурса;

$f(s) = \frac{s}{b+s}$  – функция, характеризующая влияние количество ресурса на скорость его потребления;

$\mu_s$  – удельная скорость роста ресурса. Все константы положительные. Если

ресурс не восполняется, то в третьем уравнении  $\mu_s = 0$ .

Матрица Якоби будет иметь вид:

$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 \left( \frac{s}{b_1 + s} - 2u_1 \right) & 0 & \frac{u_1 \mu_1 b_1}{(b_1 + s)^2} \\ 0 & \mu_2 \left( \frac{s}{b_2 + s} - 2u_2 \right) & \frac{u_2 \mu_2 b_2}{(b_2 + s)^2} \\ -\frac{\gamma_1 \mu_1 s}{b_1 + s} & -\frac{\gamma_2 \mu_2 s}{b_2 + s} & -\frac{\gamma_1 \mu_1 b_1 u_1}{(b_1 + s)^2} - \frac{\gamma_2 \mu_2 b_2 u_2}{(b_2 + s)^2} + \mu_s \left( 1 - 2 \frac{s}{K} \right) \end{pmatrix}$$

Тогда стационарные точки:

$$1. \ u_1 = 0, u_2 = 0, s = 0.$$

В этой стационарной точке матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_s \end{pmatrix}$$

имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.

$$2. \ u_1 = 0, u_2 = 0, s = K.$$

В этой стационарной точке матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 \frac{K}{b_1 + K} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 \frac{K}{b_2 + K} & 0 \\ -\frac{\gamma_1 \mu_1 K}{b_1 + K} & -\frac{\gamma_2 \mu_2 K}{b_2 + K} & -\mu_s \end{pmatrix}$$

имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.

$$3. \ u_1 = 0, u_2 = \frac{s}{s+b_2}, f(s) = -\gamma_2 \mu_2 \frac{s}{(s+b_2)^2} + \mu_s \left( 1 - \frac{s}{K} \right).$$

В этой стационарной точке матрица Якоби



$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 \left( \frac{s}{b_1 + s} \right) & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 \frac{s}{b_2 + s} & \frac{s\mu_2 b_2}{(b_2 + s)^3} \\ -\frac{\gamma_1 \mu_1 s}{b_1 + s} & -\frac{\gamma_2 \mu_2 s}{b_2 + s} & -\frac{\gamma_2 \mu_2 b_2 s}{(b_2 + s)^3} + \mu_s \left( 1 - 2 \frac{s}{K} \right) \end{pmatrix}$$

имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.

$$4. u_2 = 0, u_1 = \frac{s}{s+b_1}, f(s) = -\gamma_1 \mu_1 \frac{s}{(s+b_1)^2} + \mu_s \left( 1 - \frac{s}{K} \right).$$

В этой стационарной точке матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} -\mu_1 \frac{s}{b_1 + s} & 0 & \frac{s\mu_1 b_1}{(b_1 + s)^3} \\ 0 & \mu_2 \frac{s}{b_2 + s} & 0 \\ -\frac{\gamma_1 \mu_1 s}{b_1 + s} & -\frac{\gamma_2 \mu_2 s}{b_2 + s} & -\frac{\gamma_1 \mu_1 b_1 s}{(b_1 + s)^3} + \mu_s \left( 1 - 2 \frac{s}{K} \right) \end{pmatrix}$$

имеет положительное собственное значение. Поэтому стационарная точка неустойчива.

$$5. u_1 = \frac{s}{s+b_1}, u_2 = \frac{s}{s+b_2},$$

$$f(s) = -\gamma_1 \mu_1 \frac{s}{(s+b_1)^2} - \gamma_2 \mu_2 \frac{s}{(s+b_2)^2} + \mu_s \left( 1 - \frac{s}{K} \right).$$

Единственное нетривиальное решение здесь уравнения  $f(s) = 0$ . При  $s=0$  правая часть положительна, при  $s=\infty$ , правая часть отрицательна, значит, данное уравнение будет иметь хотя бы одно решение.

Аналогично предыдущей модели, получаем, что один из корней уравнения является стационарной точкой.

На рисунке 28 отображено изменение численности двух малочисленных в начальный момент популяций на невозстанавливаемом трофическом ресурсе для случая  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $\gamma_1 = 1.4$ ,  $\gamma_2 = 1.6$ ,  $\mu_s = 1$ ,  $K = 10$ ,  $u_0^1 = 0.001$ ,  $u_0^2 = 0.002$ ,  $S_0 = 1$ .

На рисунке 29 отображено изменение численности двух

малочисленных в начальный момент популяций на восстанавливаемом трофическом ресурсе для случая  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $\gamma_1 = 1.4$ ,  $\gamma_2 = 1.6$ ,  $\mu_s = 0$ ,  $K = 10$ ,  $u_0^1 = 0.001$ ,  $u_0^2 = 0.002$ ,  $S_0 = 1$ .

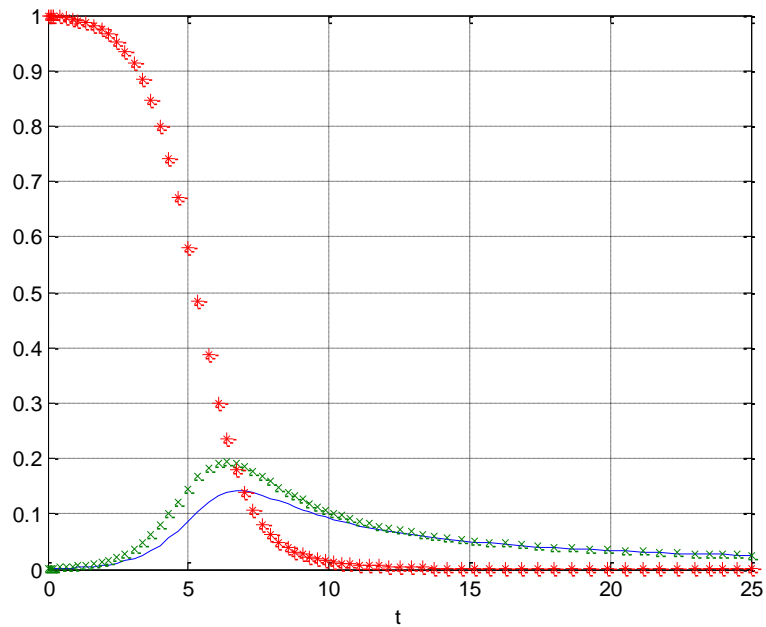


Рис. 28

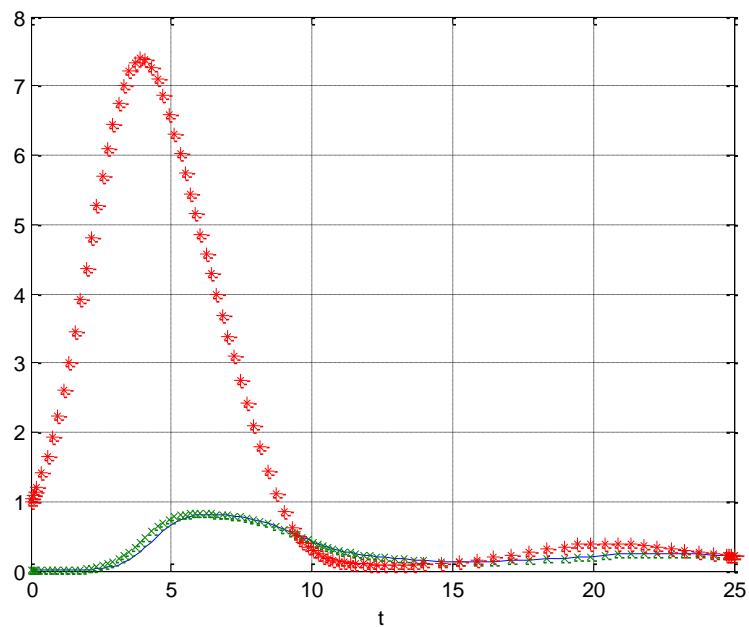


Рис.29

Можно заметить, что для обоих случаев наблюдается совместное существование компаний.

## Эксплуатационная модель с участием $n$ компаний

Можно построить аналогичную модель (7) для  $n$  компаний, которая позволит оценить границы изменения индексов концентрации и Херфиндаля-Хиршмана в зависимости от  $n$ . Согласно (6) имеем:

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i \left( \frac{s}{s + b_i} - \frac{u_i}{K_i} \right) \\ \frac{ds}{dt} = - \sum_{i=1}^n \gamma_i \mu_i u_i \frac{s}{s + b_i} + \mu_s s \left( 1 - \frac{s}{K} \right) \end{cases} \quad (7)$$

Где  $u_i$  – объем продукции  $i$ -ой компании;

$\mu_i$  – удельная скорость роста  $i$ -ой компании;

$s$  – количество ресурса;

$K_i, K$  – емкость среды (максимальное количество ресурса, который может быть произведен);

$\gamma_i$  – коэффициент переработки ресурса;

$f(s) = \frac{s}{s+b_i}$  – функция, характеризующая влияние количество ресурса на скорость его потребления;

$\mu_s$  – удельная скорость роста ресурса. Все константы положительные.

Также полагаем:

1.  $\frac{\partial u_m}{\partial t} = \mu_m u_m$  – это скорость наращивания выпуска продукции, если ресурс неограничен;
2.  $\left( \frac{s}{b_m+s} - \frac{u_m}{K_m} \right)$  – это доля того, что можно произвести еще на ограниченном ресурсе, если уже произведено  $u_m$ ;

Далее, чтобы установить границы индексов, осуществляем генерацию констант и начальных данных для  $n$  компаний следующим образом:

$$\mu_m = 1 + \delta_m^\mu,$$

$$b_m = 1 + \delta_m^b,$$

$$K_m = 1 + \delta_m^K,$$

$$u_0^m = \delta_m^{u_0},$$

Где  $\delta_m^\mu, \delta_m^b, \delta_m^K, \delta_m^{u_0}$  – случайные числа от 0 до 1. Выбирается данная генерация для того, чтобы избежать сингулярности в правой части системы дифференциальных уравнений.

Вводя в рассмотрение данную модель, становится возможным проверка границ индексов на данной модели. Сегодняшние технологии, оборудование, квалификация персонала от компании к компании отличается незначительно по техническому потенциалу. С учетом этого, константы отличаются друг от друга не более чем в два раза.

Чтобы установить границы индексов проводится разное количество экспериментов для 20 субъектов, тогда результаты будут иметь вид, представленный на рисунках 30-32.

*100 экспериментов*

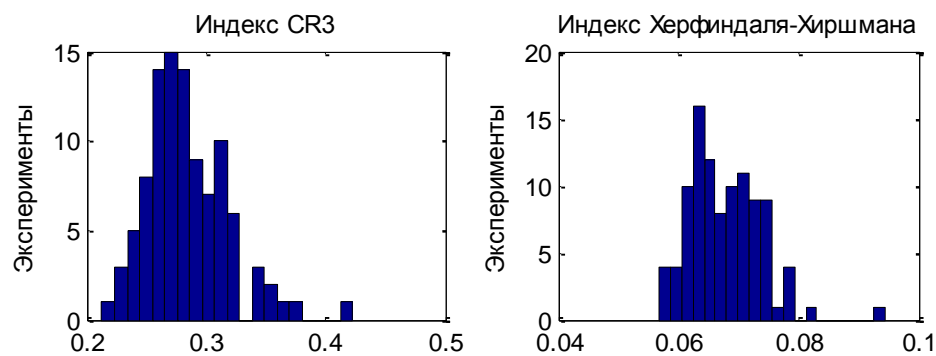


Рис. 30

*1000 экспериментов*

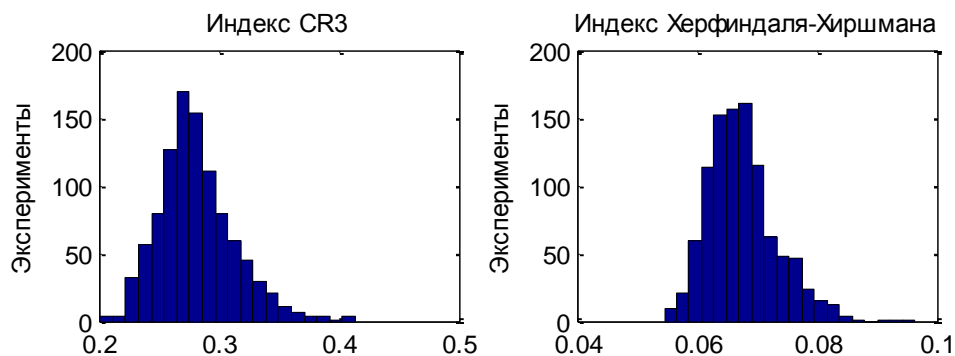


Рис. 31

10000 экспериментов

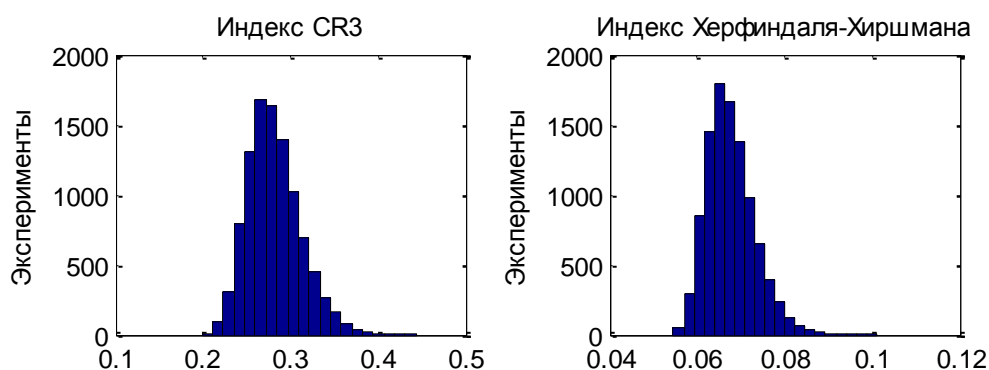


Рис. 32

Далее рассматривается влияние количества субъектов на изменение индекса концентрации и Херфиндаля-Хиршмана. Результаты представлены на рисунках 33 и 34. Для 15 субъектов уже выполняются границы индексов концентрации и Херфиндаля-Хиршмана. Также с увеличением числа субъектов индекс уменьшается, что подтверждается теорией. Исходя из этого, можно предположить, что модель дает хорошие результаты и может применяться наравне с остальными моделями.

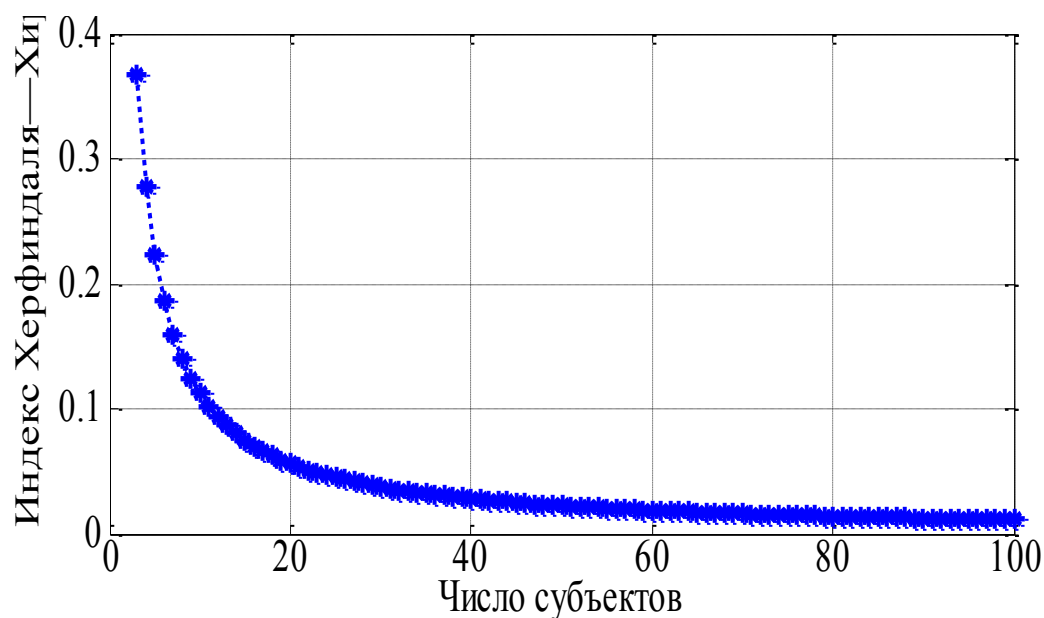


Рис. 33

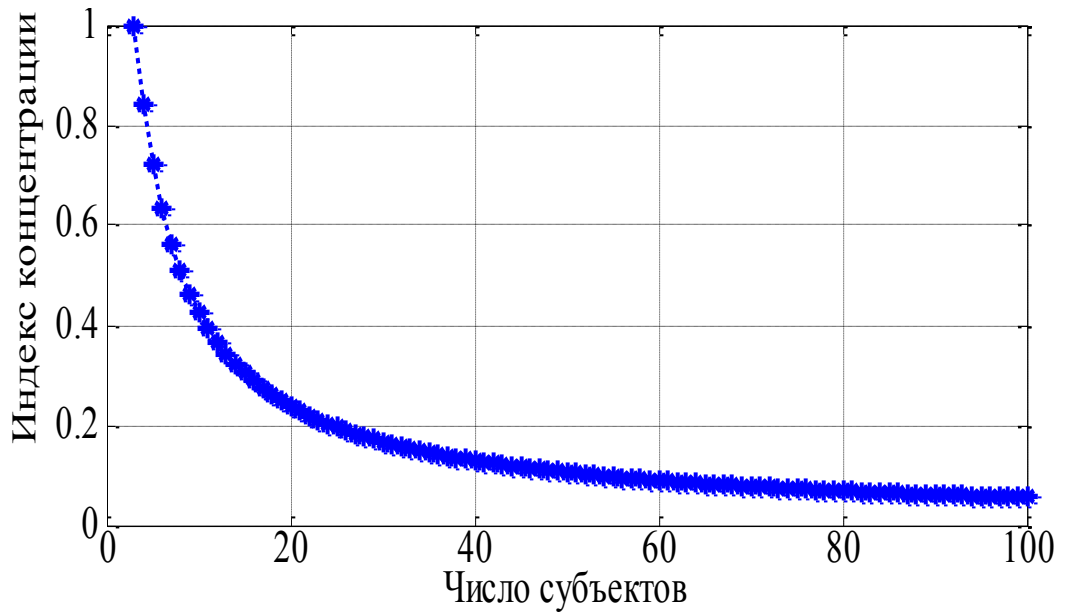


Рис. 34

### ***Эксплуатационная модель с $n$ камерами***

Однако, используя предыдущую модель, нельзя сделать никакие выводы о распространении объемов продукции по территории. Тогда можно использовать следующую модель (8):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i \left( \frac{S_i}{S_i + b_i} - \frac{u_i}{K_i} \right) + v(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \\ \frac{dS_i}{dt} = \mu_{S_i} S_i \left( 1 - \frac{S_i}{S_{i0}} \right) - \alpha_i \frac{S_i}{S_i + b_i} u_i \\ \frac{du_1}{dt} = \mu_1 u_1 \left( \frac{S_1}{S_1 + b_1} - \frac{u_1}{K_1} \right) + v(u_2 - u_1) \\ \frac{du_n}{dt} = \mu_n u_n \left( \frac{S_n}{S_n + b_n} - \frac{u_n}{K_n} \right) + v(u_{n-1} - u_n) \end{array} \right. \quad (8)$$

Где  $u_i$  – объем продукции  $i$ -ой компании;

$\mu_i$  – удельная скорость роста  $i$ -ой компании;

$S$  – количество ресурса;

$K_i, K$  – емкость среды (максимальное количество ресурса, который может быть произведен);

$v$  – скорость распространения ресурса;

$f(s) = \frac{S_i}{S_i + b_i}$  – функция, характеризующая влияние количество ресурса на

скорость его потребления;

$\alpha_i$  – коэффициент переработки ресурса;

$\mu_s$  – удельная скорость роста ресурса. Все константы положительные.

Далее, чтобы установить границы индексов, осуществляем генерацию произвольных констант и начальных данных следующим образом:

$$\mu_m = 1 + \delta_m^\mu,$$

$$\mu_m^s = 1 + \delta_m^{\mu_s},$$

$$b_m = 1 + \delta_m^b,$$

$$K_m = 1 + \delta_m^K,$$

$$\alpha_i = 1 + \delta_m^\alpha,$$

Где  $\delta_m^\mu, \delta_m^{\mu_s}, \delta_m^b, \delta_m^K, \delta_m^\alpha$  – случайные числа от 0 до 1.

Сначала зафиксируем количество компаний и будем варьировать количество камер. Рассмотрим 15 компаний. Распределение по камерам в этом случае будет иметь вид, изображенный на рисунках 35 и 36.

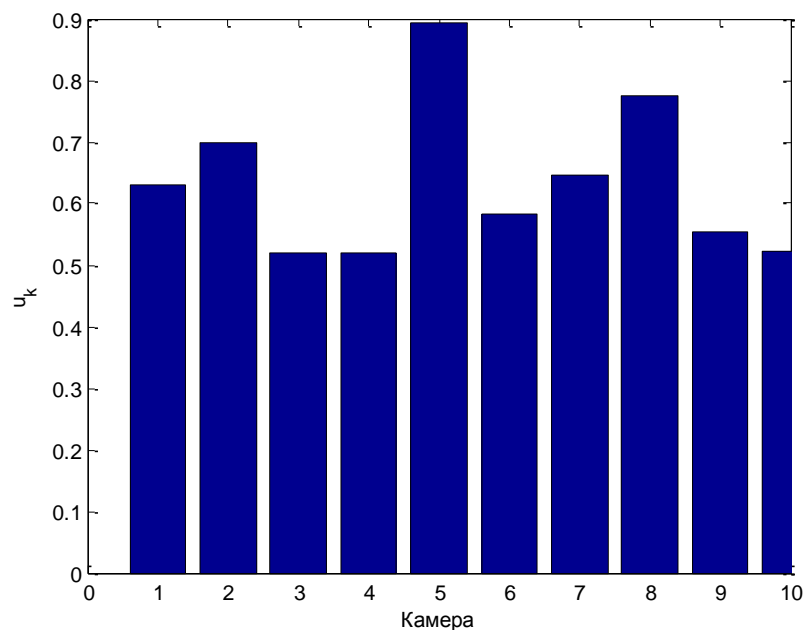


Рис. 35

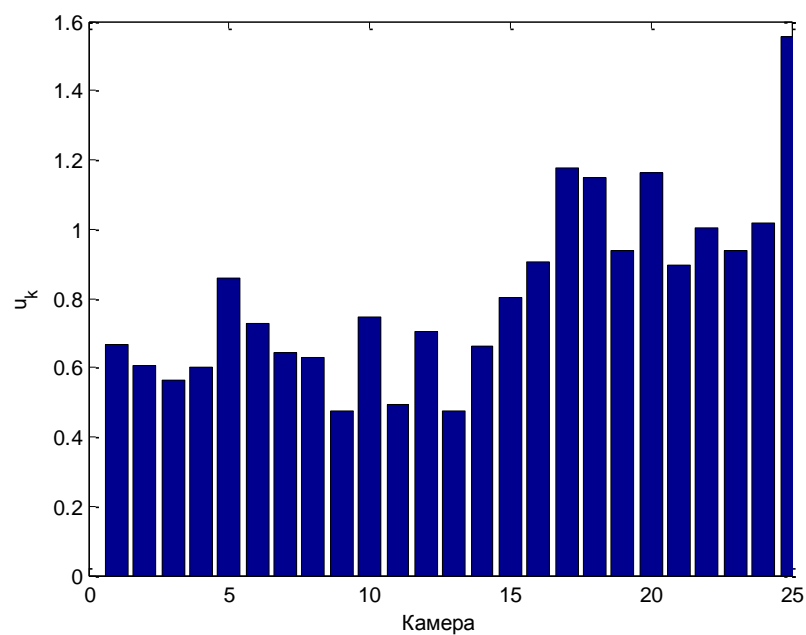


Рис.36

Теперь зафиксируем количество камер и будем варьировать количество компаний. Рассмотрим 15 камер. Распределение по камерам в этом случае будет иметь вид, изображенный на рисунках 37 и 38. На рисунке 37 – 8 компаний, на рисунке 38 – 30 компаний.

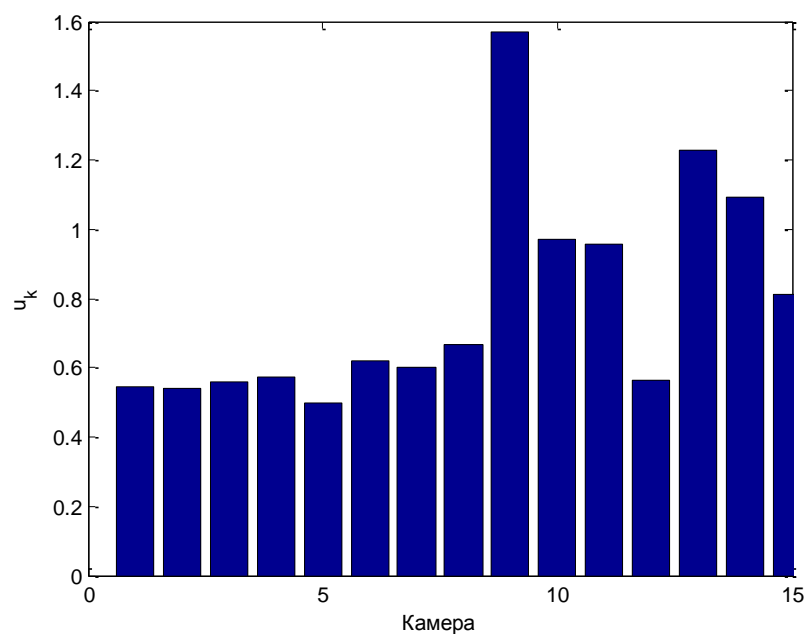


Рис. 37



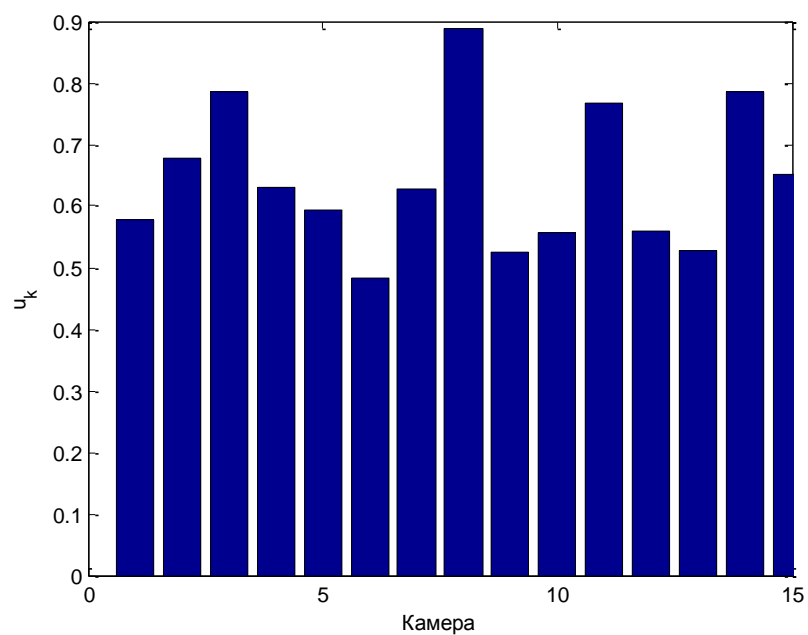


Рис.38

При каждой генерации ситуация будет меняться, но всегда будет совместное существование практически всех компаний. Это может говорить о том, что на мировом рынке и не только полученные результаты согласуются с теорией нейтрализма Гилярова.

### 3.3. Математическая модель «активного» ухода от конкуренции

Одним из возможных вариантов математического моделирования ухода от конкуренции может выступать модель «активного» ухода. За основу математической модели «активного» ухода примем модель (3), в которой параметры  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  будем считать функции времени и объема продукции компаний.

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1(1 - u_1 - \gamma_1(t, u_1, u_2)u_2) \\ \frac{du_2}{dt} = \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2(t, u_1, u_2)u_1) \\ \frac{d\gamma_1}{dt} = -\alpha_1\gamma_1\varphi_1(u_1, u_2, t) \\ \frac{d\gamma_2}{dt} = -\alpha_2\gamma_2\varphi_2(u_1, u_2, t) \end{cases} \quad (9)$$

В этой модели (9) полагается, что  $\varphi_1(u_1, u_2, t) \geq 0$  и  $\varphi_2(u_1, u_2, t) \geq 0$ . То есть предполагается, что функции  $\gamma_1(t)$  и  $\gamma_2(t)$  не возрастающие функции времени. Это обеспечивает постепенный уход от конкурирующих взаимоотношений. Принятие в качестве функций  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$ :

$$\varphi_1(t) = 0, \text{ если } \frac{du_1}{dt} > 0, \text{ и } \varphi_1(t) = 1, \text{ если } \frac{du_1}{dt} \leq 0,$$

$$\varphi_2(t) = 0, \text{ если } \frac{du_2}{dt} > 0, \text{ и } \varphi_2(t) = 1, \text{ если } \frac{du_2}{dt} \leq 0$$

означает, что компании понимают, что объем их продукции начинает убывать, и сразу реагируют на это. На рисунке 39 для случая  $\alpha_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.95$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\gamma_2 = 1.01$ ,  $\gamma = 0.7$  отражены зависимости  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  (кривые 1), для случая  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\gamma_1 = 0.95$ ,  $\alpha_2 = 0.1$ ,  $\gamma_2 = 1.01$ ,  $\gamma = 0.7$  этим же зависимостям соответствуют кривые 2.

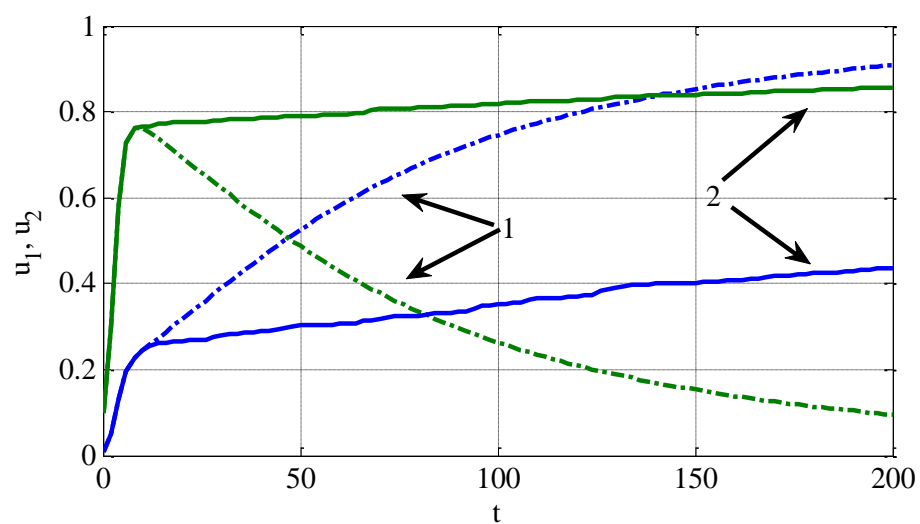


Рис. 39. Зависимость функций  $u_1$  и  $u_2$  от времени для модели (9)

### 3.4. Математическая модель сезонности конкуренции

Интенсивность производства продукции компаниями может изменяться во времени. Это может зависеть от экономической эффективности компании, закупки ресурсов, сезонности товара и других причин. То есть интенсивность конкурентных взаимоотношений может зависеть от времени. Учесть это в модели (3) можно, введя функции  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$ , зависящие от времени

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1(1 - u_1 - \gamma_1\varphi_1(t)u_2) \\ \frac{du_2}{dt} = \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2\varphi_2(t)u_1) \end{cases} \quad (10)$$

Для случая функций

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{1 + |a_1|} (1 - a_1 \cos \omega_1 t) \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{1 + |a_2|} (1 - a_2 \cos \omega_2 t) \end{aligned}$$

где  $|a_1| \leq 1$  и  $|a_2| \leq 1$ , результаты решения уравнений в виде зависимостей  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  для случая  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\gamma_1 = 1.3$ ,  $\alpha_2 = 0.4$ ,  $\gamma_2 = 1.01$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\omega_1 = \pi$ ,  $u_1(0) = 1$ ,  $u_2(0) = 1$  представлены на рисунках 40 и 41. Рисунок 40 соответствует  $\omega_2 = 0.06$ , а рисунок 41  $\omega_2 = 0.2$ .

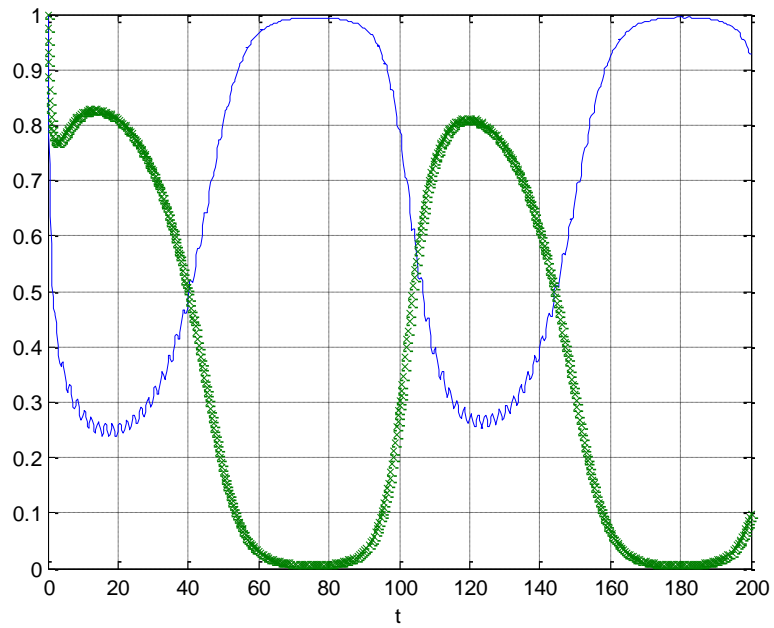


Рис. 40. Зависимость функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  от времени для модели (6)

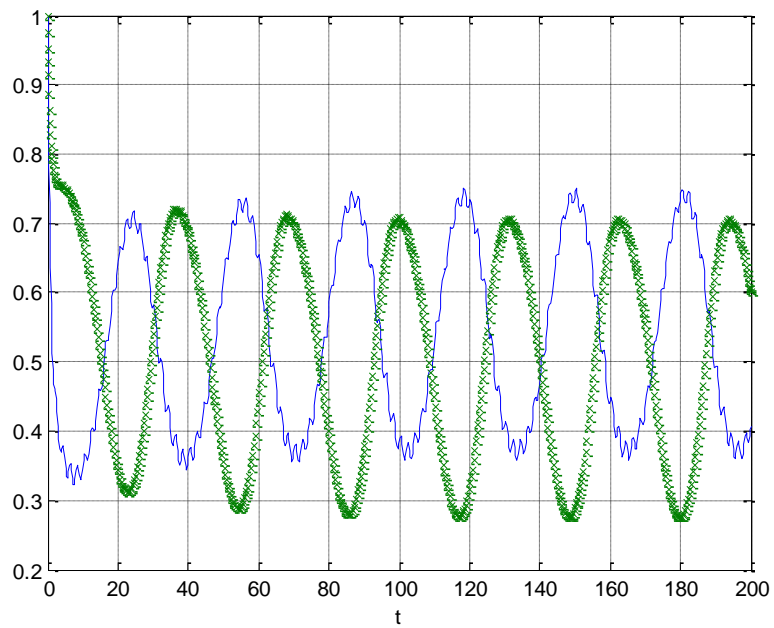


Рис. 41. Зависимость функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  от времени для модели (6)

В качестве начальных условий принималось  $u_1(0) = 1$  и  $u_2(0) = 1$ . Это соответствует случаю, когда конкурентные взаимоотношения начинаются в начальный момент времени при максимальных значениях  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ . При принятых значениях  $\gamma_1 = 1.1$  и  $\gamma_2 = 1.3$  в случае  $\omega_1 = 0$  и

$\omega_2 = 0$ , как это следует из анализа уравнений (10), одновременное существование двух популяций невозможно. Построение численного решения осуществлялось в среде программирования математического пакета Matlab [37]. Решение задачи Коши для решения системы дифференциальных уравнений осуществлялось с помощью метода Рунге-Кутты [38,39].

### 3.5. Математическая модель смены производства товара

При наличии конкуренции одна из компаний может уйти от конкурентных взаимоотношений путем запуска новой продукции на рынок. Пусть  $v_1$  – объем новой продукции первой компании. Тогда модель (3) переходит в модель (11):

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1(1 - u_1 - \gamma_1 u_2) - bu_1 \\ \frac{du_2}{dt} = \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2 \varphi_2(t)u_1) \\ \frac{dv_1}{dt} = \gamma_v v_1(1 - v_1) + bu_1 \end{cases} \quad (11)$$

в которой  $\gamma_v$  – постоянная, а  $b$  – скорость перехода первой компании от производства старой продукции к новой продукции.

Как следует из анализа модели (3) при  $\gamma_1 > 1$  и  $\gamma_2 > 1$  первая компания прекращает свое существование. Стационарная точка системы уравнений (11)

$$u_1 = 0, v_1 = 1, u_2 = 1$$

при выполнении этих неравенств будет устойчивой. Это соответствует случаю полному переходу первой популяции на новый трофический ресурс.

При одновременном выполнении неравенств  $\gamma_1 < 1$  и  $\gamma_2 < 1$  система уравнений может иметь нетривиальную стационарную точку

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1 - b - \gamma_1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \\ u_2 &= \frac{1 - \gamma_2(1 - b)}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \\ v_1 &= \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4bu_1}{\gamma_v}} \right) \end{aligned}$$

если выполняется неравенство  $b - \gamma_1 < 1$ . При этом собственные значения матрицы Якоби правой части уравнений (11) являющиеся корнями уравнения

$$\left( \lambda + \gamma_v \sqrt{1 + \frac{4bu_1}{\gamma_v}} \right) (\lambda^2 + (u_1 + \gamma u_2) + \gamma u_1 u_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2)) = 0$$

будут иметь отрицательные вещественные части. То есть в случае реализации эта стационарная точка будет устойчивой.



### 3.6. Математическая модель гетерогенного ареала

Экономическим сообществам не свойственна однородность. В экономической сфере это проявляется в разнообразных ресурсах, территориальных промышленных центрах разной мощности и так далее. При построении математических моделей используется аппарат дифференциальных уравнений в частных производных [40,41]. Основная гипотеза в этих моделях предполагает, что производители на территории перемещаются случайным образом. В математических моделях в первом приближении будем считать, что сегодняшнее распределение продукции на рынке происходит случайным образом [42]. В качестве территории, на которой происходит конкуренция, рассмотрим линейный ареал.

**Взаимодействующие компании на отрезке.** Математическая модель двух взаимодействующих на отрезке компаний для случая отрезка представляется системой двух эволюционных уравнений [43]

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f_1(u_1, u_2) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f_2(u_1, u_2) \end{cases} \quad (12)$$

В этих уравнениях  $x$  – координата,  $t$  – время,  $u_1 = u_1(t, x)$  и  $u_2 = u_2(t, x)$  – линейные плотности продукции компаний,  $D_1$  и  $D_2$  – параметры, характеризующие подвижности компаний,  $f_1(u_1, u_2)$  и  $f_2(u_1, u_2)$  – трофические функции, характеризующие взаимодействие между продуктами компаний.

К системе уравнений (12) для случая отрезка длины  $l$  необходимо добавить начальные и граничные условия. В качестве начальных условий задается значение функций  $u_1 = u_1(t, x)$  и  $u_2 = u_2(t, x)$  в начальный момент времени: при  $t = 0$   $u_1(x) = u_{10}(x)$ ,  $u_2(x) = u_{20}(x)$ .

В качестве граничных условий рассматриваются два варианта:

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (13)$$

и

$$u_1|_{x=0} = 0, \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0, u_2|_{x=0} = \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0 \quad (14)$$

Условие обращения в ноль функций  $u_1$  и  $u_2$  на границе отрезка соответствует невозможности существования компании в этой точке, а условие обращения в ноль производных  $\frac{\partial u_1}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u_2}{\partial x}$  (условие наполнения среды) допускает свободный рост численности продукта компаний.

Общее количество продукции компаний ( $M_1(t)$  и  $M_2(t)$ ) на отрезке в момент времени  $t$  подсчитываются по формулам

$$M_1(t) = \int_0^l u_1(t, x) dx, M_2(t) = \int_0^l u_2(t, x) dx.$$

Для двух конкурирующих компаний ( $u_1 = u_1(t, x)$  – плотность продукта первой компании,  $u_2 = u_2(t, x)$  – плотность продукта второй компании) функции  $f_1(u_1, u_2)$  и  $f_2(u_1, u_2)$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \text{при } u_1 = 0 \text{ и } u_2 = 0: f_1(u_1, u_2) = 0, f_2(u_1, u_2) = 0, \frac{\partial f_1}{\partial u_1} > 0, \frac{\partial f_2}{\partial u_2} > 0; \\ \text{при } u_1 = 0: \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \leq 0, \frac{\partial f_1}{\partial u_2} = 0; \\ \text{при } u_2 = 0: \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \geq 0, 0 \leq f_1(u_1, 0) < \infty; \end{aligned} \quad (15)$$

Первое условие означает, что компании в отсутствие продукта на территории возникнуть не могут, второе – количество продукции одной компании в отсутствие второй будет все время убывать. Третье условие соответствует возникновению новой компании с новым продуктом с не лимитированным ростом при малом его количестве на неограниченном трофическом ресурсе (т.е. компания, производящая малое количество продуктов не исчезает).

В качестве моделей рассматриваются две модели с трофическими функциями ( $0 \leq \gamma \leq 1$ )

$$f_1(u_1, u_2) = u_1 - u_1 u_2, f_2(u_1, u_2) = -\gamma u_2 + u_1 u_2 \quad (16)$$

и

$$f_1(u_1, u_2) = u_1(1 - u_1) - u_1 u_2, f_2(u_1, u_2) = -\gamma u_2 + u_1 u_2 \quad (17)$$

Первый вариант трофических функций соответствует модели Лотка-Вольтерра, во втором варианте учитывается внутривидовая конкуренция.

Точечная модель следует из (12) при  $D_1 = 0$  и  $D_2 = 0$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = f_1(u_1, u_2) \\ \frac{du_2}{dt} = f_2(u_1, u_2) \end{cases} \quad (18)$$

Стационарные точки этой системы уравнений находятся как решение системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1(u_1, u_2) = 0 \\ f_2(u_1, u_2) = 0 \end{cases}$$

**Устойчивость решений.** Стационарные точки системы уравнений (18) (пусть  $u_1 = u_1^*$ ,  $u_2 = u_2^*$ ) будут устойчивыми, если собственные значения матрицы Якоби

$$J = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Где  $f_{11} = \frac{\partial f_1(u_1^*, u_2^*)}{\partial u_1}$ ,  $f_{12} = \frac{\partial f_1(u_1^*, u_2^*)}{\partial u_2}$ ,  $f_{21} = \frac{\partial f_2(u_1^*, u_2^*)}{\partial u_1}$ ,  $f_{22} = \frac{\partial f_2(u_1^*, u_2^*)}{\partial u_2}$ , в стационарных точках будут иметь отрицательные вещественные части. В нулевой стационарной точке с учетом условий (15), накладываемых на функции  $f_1 = f_1(u_1, u_2)$  и  $f_2 = f_2(u_1, u_2)$ , оба собственных значения будут положительными и, соответственно, эта стационарная точка будет неустойчивой.

Стационарные решения системы уравнений (18) будут являться и решениями системы уравнений (12) при граничных условиях (13), если в качестве начальных условий принять  $u_{10}(x) = u_1^*$ ,  $u_{20}(x) = u_2^*$ . Пусть наряду с этим решением существует близкое к нему решение

$$u_1(t, x) = u_1^* + \delta u_1(t, x), u_2(t, x) = u_2^* + \delta u_2(t, x)$$

такое, что  $\delta u_1(t, x)$  и  $\delta u_2(t, x)$  малые по сравнению с  $u_1^*, u_2^*$  величины. Тогда с точностью до величин второго порядка малости из системы уравнений (12) следуют уравнения для  $\delta u_1(t, x)$  и  $\delta u_2(t, x)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 \delta u_1}{\partial x^2} + f_{11} \delta u_1 + f_{12} \delta u_2 \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 \delta u_2}{\partial x^2} + f_{21} \delta u_1 + f_{22} \delta u_2 \end{cases} \quad (19)$$

Решения этих линейных уравнений, удовлетворяющие граничным условиям (13), ищутся в виде тригонометрических рядов

$$\delta u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \cos k\pi x/l, \quad \delta u_2 = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \cos k\pi x/l$$

Коэффициенты  $A_k(t)$  и  $B_k(t)$  должны удовлетворять уравнениям, где  $\mu_k = \frac{k\pi}{l}, k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \frac{dA_k}{dt} = -D_1 \mu_k^2 A_k + f_{11} A_k + f_{12} B_k \\ \frac{dB_k}{dt} = -D_2 \mu_k^2 B_k + f_{21} A_k + f_{22} B_k \end{cases} \quad (20)$$

Решение этих уравнений будет устойчивым, если собственные значения матрицы Якоби

$$J_k = \begin{pmatrix} -D_1 \mu_k^2 + f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & -D_2 \mu_k^2 + f_{22} \end{pmatrix}$$

правой части этих уравнений будут иметь отрицательную вещественную часть для всех  $k = 0, 1, 2, \dots$

Для случая трофических функций (16) стационарная точка системы уравнений (18)  $u_1 = \gamma, u_2 = 1$  является центром, поскольку собственными значениями матрицы Якоби будут  $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\gamma}$ . Для случая системы уравнений (20) матрица Якоби (21)

$$J_k = \begin{pmatrix} -D_1 \mu_k^2 & -\gamma \\ 1 & -D_2 \mu_k^2 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения с отрицательной вещественной частью для всех  $k = 1, 2, \dots$  а для  $k = 0$  собственные значения совпадают с собственными

значениями матрицы Якоби системы уравнений (18). Поэтому в окрестности этого положения равновесия  $A_0(t)$  и  $B_0(t)$  будут изменяться по гармоническому закону, а  $A_k(t)$  и  $B_k(t)$  для  $k = 1, 2, \dots$  будут со временем стремиться к нулю. Соответственно общее решение системы уравнений со временем перестанет зависеть от пространственной координаты.

Для трофических функций (17) стационарной точкой уравнений (18) является  $u_1 = \gamma$ ,  $u_2 = 1 - \gamma$ . Собственными значениями матрица Якоби в этой стационарной точке, поскольку выполняются неравенства  $0 \leq \gamma \leq 1$ , будет пара комплексно сопряженных корней  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-\gamma \pm i\sqrt{\gamma(4-\gamma)})$  и, соответственно, стационарная точка является устойчивым фокусом.

Собственные значения матрицы Якоби (21) системы уравнений (20)

$$J_k = \begin{pmatrix} -D_1\mu_k^2 - \gamma & -\gamma \\ 1 & -D_2\mu_k^2 \end{pmatrix}$$

для всех  $k = 0, 1, 2, \dots$  будут иметь отрицательные вещественные части. Поэтому при малых отклонениях от положения равновесия решение системы уравнения (19) будет стремиться к гомогенному решению  $u_1(t, x) = \gamma$ ,  $u_2(t, x) = 1 - \gamma$ .

Для случая граничных условий (14) стационарной системе уравнений (12) удовлетворяет решение  $u_1(x) = 0$ ,  $u_2(x) = 0$ .

Решение уравнений для возмущений (19), удовлетворяющее граничным условиям (14), в окрестности этого стационарного решения представляется в виде тригонометрического ряда

$$\delta u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) \sin \mu_k x, \delta u_2 = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t) \mu_k \sin \mu_k x, \mu_k = \frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{l}$$

Матрица Якоби

$$J_k = \begin{pmatrix} -D_1\mu_k^2 + |f_{11}| & 0 \\ f_{12} & -D_2\mu_k^2 - |f_{22}| \end{pmatrix}$$

правой части уравнений (20) в силу условий (15), накладываемых на трофические функции, будет иметь собственные значения

$$\lambda_1 = -D_1\mu_k^2 + |f_{11}|, \lambda_2 = -D_2\mu_k^2 + |f_{22}|.$$

Первое собственное значение отрицательное, а второе будет отрицательным, для всех  $k = 1, 2, \dots$ , если выполняется условие  $D_1 \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 > \frac{\partial f_1}{\partial u_1}$ . При выполнении этого неравенства тривиальное решение будет устойчивым.

## Заключение

Анализ мирового рынка зерновых культур показал:

1. По основным видам зерновых культур происходит постоянный рост продаж на мировом рынке.
2. Ведущие страны, производящие максимальный объем продукции практически всегда меняются местами. Они могут не являться монополистами.
3. Статистический анализ с использованием индексов концентрации и Херфиндаля-Хиршмана говорит о неоднородности мирового рынка экспорта зерновых культур.
4. Используемые критерии не позволяют дать прогноз ситуации на мировом рынке на длительный временной интервал.

На основании статистического анализа разработан критерий, позволяющий дать прогноз состояния конкурентной среды зерновых культур. С учетом статистических данных разработаны модели эксплуатационной конкуренции для  $n$  компаний. Добросовестная конкуренция в рамках эксплуатационной модели может состояться не менее чем при 15 участниках. Неоднородность распределения производителя по территории в рамках эксплуатационной конкуренции можно считать естественной.

Разработана модель, позволяющая установить границы применимости новых критериев. Также применение математических методов позволяют на основании ключевых позиций теории нейтрализма разработать модели:

- «активного» ухода от конкуренции;
- сезонности конкуренции;
- смены ареала;
- гетерогенного ареала.

## Список литературы

1. Медведев А. Г. Международный менеджмент: стратегические решения в многонациональных компаниях: учебник / А. Г. Медведев; С.-Петерб. гос. ун-т. — СПб.: Изд-во «Высшая школа менеджмента», 2014. 496 с.
2. Begon M., Townsend C.R., Harper J.L. Ecology from individuals to ecosystems. Wiley. 2009. 752 p.
3. Статистические данные  
[http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat\\_main/rosstat/ru/statistics/enterprise/reform/#](http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/enterprise/reform/#)
4. Колпак Е. П., Горыня Е. В., Крылова В. А., Полежаев Д. Ю. Математическая модель конкуренции двух популяций на линейном ареале // Молодой ученый, 2014. № 12 (71). С. 12–22.
5. Горыня Е. В. Математическая модель конкуренции двух популяций (линейный ареал) // Сборник трудов конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». 2014. С. 206-209
6. Колпак Е. П., Горыня Е. В. Математические модели «ухода» от конкуренции // Молодой ученый, 2015. № 11. С. 59–70.
7. Колпак Е. П., Горыня Е. В., Иванова А. А. Показатели конкуренции. Международная торговля России в XIX веке // Молодой ученый, 2016. № 3 (107). С. 534–547.
8. Колпак Е. П., Горыня Е. В., Иванова А. А. Показатели конкуренции. Международная торговля СССР // Молодой ученый, 2016. № 4 (108). С. 402–413.
9. Колпак Е. П., Горыня Е. В., Селицкая Е. А. О моделях А. Д. Базыкина «хищник-жертва»// Молодой ученый. 2016. № 2. С. 12–20.



10. Колпак Е. П., Ефремова Е. А., Горыня Е. В., Иванова А. А. Показатели конкуренции. Международная торговля Российской Федерации // Молодой ученый. 2016. №12. С. 1302-1314.
11. Горыня Е. В., Колпак Е.П. Математическая модель «сезонной» конкуренции // Сборник трудов конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». 2016. С. 98-101.
12. Горыня Е. В., Ефремова Е.А. Показатели конкуренции: внешняя торговля России // Сборник трудов конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». 2016. С. 101-104.
13. Горыня Е. В. Математическая модель создания экологической ниши // Сборник трудов конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий». 2016. С. 104-107.
14. Kolpak E.P., Gorynya E.V. Mathematical Models of Ecological Niches Search //Applied Mathematical Sciences.Vol.10.2016. no.38. P. 1907 – 1921
15. Doronina I.I, Borobov V.N., Ivanova E.A., Gorynya E.V., Zhukov B.M. Agro-industrial Clusters as a Factor of Increasing Competitiveness of the Region // International Journal of Economics and Financial Issues. 2016. 6(S1). P. 295-299.
16. Kolpak E.P., Gorynya E.V., Shaposhnikova A.I., Khasenova K.E., Zemlyakova N.S. Special Aspects of Leasing Activities and Its Meaning in Conditions of Enterprise Competitiveness // International Review of Management and Marketing. 2016. 6(S6). P. 126-133.
17. Гиляров А. М. В поисках универсальных закономерностей организации сообществ: прогресс на пути нейтрализма // Журнал общей биологии, 2010. Т. 71. № 5. С. 386–401.

18. Туган-Барановский М. И. Конкуренция. Б.-Э. СПб.: тип. И. А. Ефрона, т. XVI. 480 с.
19. Калиновский Б. О развитии и распространении идеи свободной торговли и применении ее к положительным законодательствам в главных западноевропейских государствах. С. Петербург, тип. Рюмина и комп., 1859. 221 с.
20. Светульников М.Г., Волков А.В. Проблема измерения уровня конкуренции в целях разработки предпринимательских решений (с учетом многоуровневой модели рынка) // Вестник Оренбургского государственного университета, 2010. № 8 (114). С. 107-113.
21. Кроливецкий Э. Н., Андреев П. А. Виды конкуренции и сопутствующие им модели рынка // Петербургский экономический журнал, 2015. № 2. С. 55-69.
22. Seiya Nishikawa Mathematical model for cell competition: Predator–prey interactions at the interface between two groups of cells in monolayer tissue / Seiya Nishikawa, Atsuko Takamatsu, Shizue Ohsawa, Tatsushi Igaki // Journal of Theoretical Biology, 2016. V. 404. PP. 40–50.
23. Laguna M.F. Abramson G., Kuperman M.N., Lanata J.L., Monjeau J.A. Mathematical model of livestock and wildlife: Predation and competition under environmental disturbances // Ecological Modelling, 2015. V. 309-310. N 1. PP. 110-117.
24. Bellouquid A., Delitala M. Mathematical Modeling of Complex Biological Systems. Boston. 2006. 188 p.
25. Puu T. Nonlinear economic dynamics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. 276 p.
26. Gause, G. F. The Struggle for Existence. Williams and Wilkins Company, Baltimore. 1934. 160 pp.
27. Бигон М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяції и сообщества: в 2-х т. Т. 2. М.: Мир, 1989. 477 с.

28. Bi-Huei Tsai Modelling competition in global LCD TV industry / Bi-Huei Tsai, Yiming Li // *Applied Economics*, 2011. V. 43. PP. 2969–2981.
29. Федеральный закон Российской Федерации от 26 июля 2006 г. № 135-ФЗ. <http://krimlin.ru/act/bank/24149>. (20.01.2016).
30. Гуляев Г.Ю. Эволюция теории конкуренции / Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского, 2012. № 28. С. 317-321.
31. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 288 с.
32. Мюррей Дж. Математическая биология. Том. 1. Введение. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 776 с.
33. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 368 с.
34. Bazykin A.D. Nonlinear Dynamics of Interacting Populations, Singapore, 1998. Ser. World Scientific Series on Non-Linear Science. 193 p.
35. Мэддисон Э. Контуры мировой экономики в 1-2030 гг. Очерки по макроэкономической истории / пер. с англ. Ю. Каптуревского, под ред. Филаточевой М.: Издательство Институт Гайдаров, 2012. 584 с.
36. Статистические данные: <http://www.fao.org/faostat/en/>
37. Васильев А. Н. Matlab. Самоучитель. Практический подход. СПб.: Наука и техника, 2012. С. 273-311
38. Бахвалов Н. С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975. С. 535-618
39. Holzbecher E. Environmental Modeling Using MATLAB. Springer Berlin Heidelberg New York 2007. 392 p

40. Diamond J.M. Distributional ecology of New Guinea birds // Science, 1973. V. 179. P. 759-769
41. Feng-Bin Wang A system of partial differential equations modeling the competition for two complementary resources in flowing habitats / Feng-Bin Wang // J. Differential Equations, 2010. V. 249. – PP. 2866–2888
42. Murray D. D. Mathematical biology. N.Y. Springer, 2002. 551 p.
43. Zhao L., Wang Z.-C., Ruan, S. Traveling wave solutions in a two-group SIR epidemic model with constant recruitment // Journal of Mathematical Biology, 2018. V. 21. N 3. PP. 1-45.